

基礎物理学

担当 小野正利
onomasat@hoku-iryo-u.ac.jp

第5回(1)

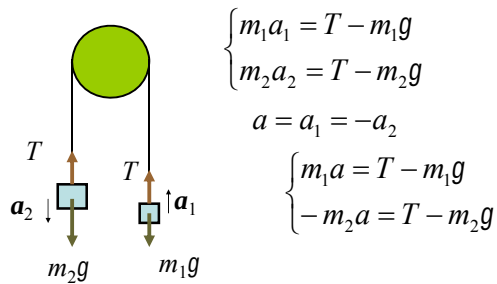
教科書

(1)「基礎物理学」

(2) <http://www.hoku-iryo-u.ac.jp/~onomasat/>

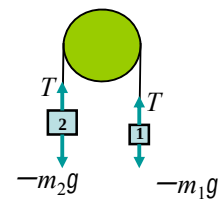
基礎物理あれこれ

4. Atwoodの機械

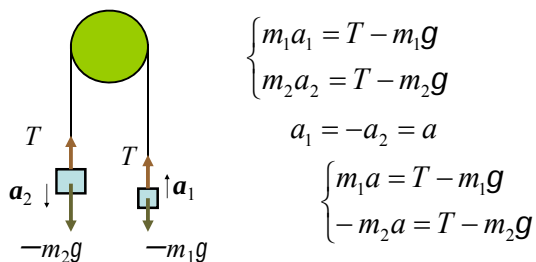


<問題4>

4. 滑らかな滑車にひもをかけて、両側に m_1, m_2 のおもりをつるした装置をアトウッドの機械という。



(1) ひもの張力を T として、それぞれのおもりの運動方程式を書け。



(2) 上の二つの式から T を消去して、おもりが動く加速度を求めよ。

$$\begin{cases} m_1 a = T - m_1 g \\ -m_2 a = T - m_2 g \end{cases} \rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

(3) 張力 T を求めよ。

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

<問題4>

1. 速度と位置が時間の関数として次のように与えられている。

$$v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + (1/2)gt^2$$

- (1) $x(t)$ を次の式に従って計算して $v(t)$ を導く。

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

- (2) $v(t)$ を次の式に従って計算して $a(t)$ を導く。

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

<問題4>

2. 次の関数を時間 t で微分せよ。

(1) $2x^2$

(2) $7xy$

$$\rightarrow 4x \frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow 7 \frac{dx}{dt} y + 7x \frac{dy}{dt}$$

(3) $6x^2yz^3$

$$\rightarrow 12x \frac{dx}{dt} yz^3 + 6x^2 \frac{dy}{dt} z^3 + 18x^2 yz^2 \frac{dz}{dt}$$

(3) $5t^2 \rightarrow 10t$

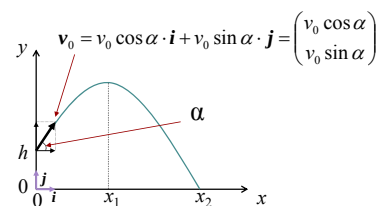
<問題4>

3. 身長 $h=180$ cm の人が、水平と角 $\alpha=30^\circ$ をなす方向に、ボールを速さ $v_0=20$ m・s⁻¹ で投げる。

- (1) ボールが最高点に達するのは、投げてから何秒後か、空気の抵抗は無視して考えよ。

- (2) ボールが地上に落ちる点は、投げた点からどれだけ離れているか。

- (1) ボールが最高点に達するのは、投げてから何秒後か、空気の抵抗は無視して考えよ。

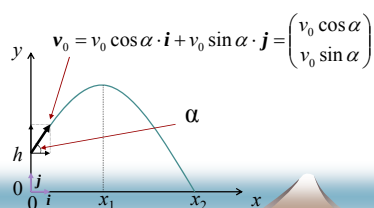


運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

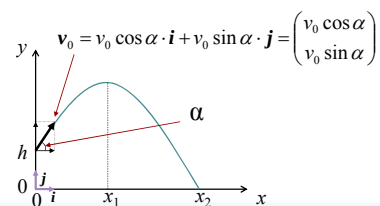
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$



$$x \text{ 方向 } m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \rightarrow m \frac{dx}{dt} = mv_0 \cos \alpha$$

$$y \text{ 方向 } m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg \rightarrow m \frac{dy}{dt} = -mgt + mv_0 \sin \alpha$$



最高点では y 方向の速度成分がゼロ

$$\begin{aligned} x \text{ 方向 } \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \\ y \text{ 方向 } \frac{d^2y}{dt^2} &= -g \rightarrow \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

最高点では y 方向の速度成分がゼロ

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -gt + v_0 \sin \alpha = 0 \\ \therefore t &= \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{20 \text{ m/s} \cdot \sin 30^\circ}{9.8 \text{ m/s}^2} = \frac{10}{9.8} \text{ s} \approx 1.02 \text{ s (秒)} \end{aligned}$$

(2) ボールが地上に落ちる点は、投げた点からどれだけ離れているか。

$$\begin{aligned} x \text{ 方向 } \frac{dx}{dt} &= v_0 \cos \alpha \rightarrow \\ x &= (v_0 \cos \alpha) \cdot t + x_0 = (v_0 \cos \alpha) \cdot t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \text{ 方向 } \frac{dy}{dt} &= -gt + v_0 \sin \alpha \rightarrow \\ y &= -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin \alpha) \cdot t + y_0 = -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin \alpha) \cdot t + h \end{aligned}$$

ボールが地上に落ちる点は、 $y=0$ の時刻 t_1 を求めることにより $t_1 v_0 \cos 30^\circ$ から得られる。

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin \alpha)t + y_0 = -\frac{9.8}{2}t_1^2 + 10t_1 + 1.8 = 0$$

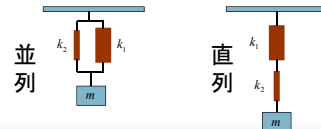
$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-4.9) \cdot 1.8}}{2 \cdot (-4.9)} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{135.28}}{-9.8} \approx \frac{10 \mp 11.63}{9.8} \\ &\approx \begin{cases} -0.166 \text{ s} \\ 2.207 \text{ s} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} at^2 + bt + c &= 0 \\ t &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

$$\therefore x_2 \approx 2.207 \text{ s} \cdot 20 \cos 30^\circ \text{ m/s} \approx 38.226 \text{ m}$$

<問題4>

5. 力が作用していない時の長さ(自然の長さ)が同じ l [m] で、ばね定数 k_1, k_2 の二つのばねを並列および直列につなぐことを考える。それぞれの場合に同じ質量 m [kg] を持つ物体をつるした。自然の長さからの伸びを求めよ。



直列

$$\begin{aligned} k_1 x_1 &= mg \\ k_2 x_2 &= mg \end{aligned}$$

$$x = x_1 + x_2 = mg \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

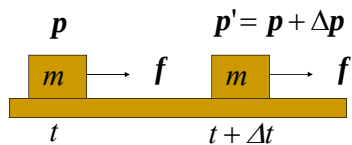
並列

$$\begin{aligned} k_1 x + k_2 x &= mg \\ x &= \frac{mg}{k_1 + k_2} \end{aligned}$$



◎ 保存則

1. 運動量 $p = mv$



$$\Delta p \equiv m \Delta v$$

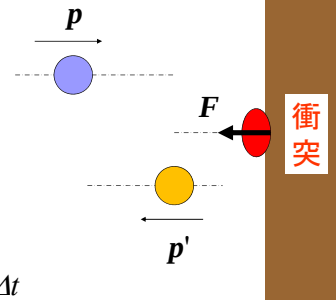
$$f = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p' - p}{\Delta t}$$

撃力: F

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p' - p}{\Delta t}$$

$$\Delta p = p' - p = F \Delta t$$

力積: $F \Delta t$



物体間に働く力(1)

近接作用

中間に存在する媒質の物理的変化を通して伝達されたとする見方。

遠隔作用

空間を隔てて存在する物体間の作用(力)を中間に介在するものを考えず、直接働くとする見方。



物体間に働く力(2)

現在の考え方

全ての物理的相互作用は近接作用に由来する。



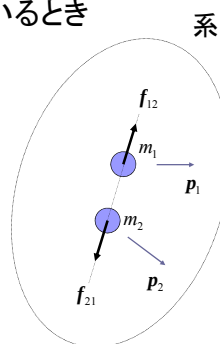
二つの物体が運動しているとき

f_{12} : 物体1が
物体2から受ける力

f_{21} : 物体2が
物体1から受ける力

$$f_{21} = -f_{12}$$

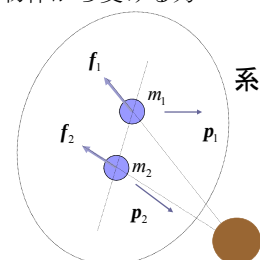
内力



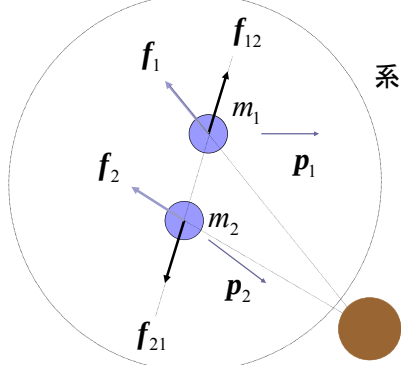
f_1 : 物体1が
物体2以外の物体から受ける力

f_2 : 物体2が
物体1以外の物体から受ける力

外力



2つの物体に働く内力と外力

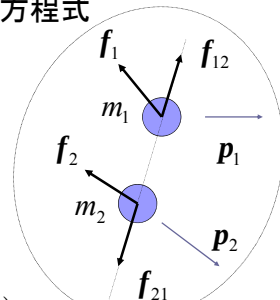


物体1と物体2の運動方程式

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = f_{12} + f_1 \\ \frac{dp_2}{dt} = f_{21} + f_2 \end{cases}$$

$$f_{21} = -f_{12}$$

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = \frac{d(p_1 + p_2)}{dt} = f_1 + f_2$$



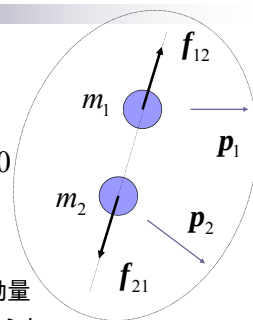
外力がゼロの場合

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = \frac{d(p_1 + p_2)}{dt} = 0$$

物体1 (m_1) と物体2 (m_2) の運動量の和が時間の経過に従って変わらない。



運動量保存の法則



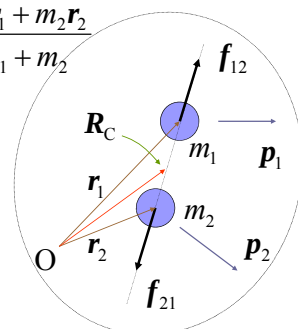
$$p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = \frac{d}{dt} (m_1 r_1 + m_2 r_2)$$

$$= (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

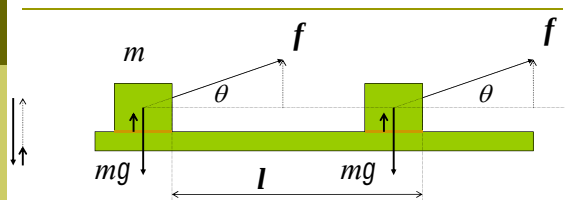
$$\equiv (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} R_C$$

$$R_C \equiv \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

質量中心



2. エネルギー保存の法則



スカラー積 (内積)

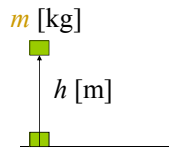
仕事 $W = (f \cos \theta) \times l = f \cdot l$

$[W = (\text{移動する方向の力}) \times (\text{移動した距離})]$

質量 m の物体を鉛直上方に h m 持ち上げる
ときの仕事(エネルギー) : W 。

$$W = (\text{移動する方向の力}) \times (\text{移動した距離})$$

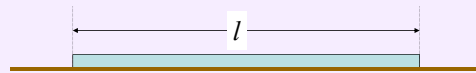
$$\begin{aligned} \text{単位: } mg [\text{kg} \cdot \text{m/s}^2] \cdot h [\text{m}] &= mg [\text{N}] \cdot h [\text{m}] \\ &= mgh [\text{Nm}] = mgh [\text{J}] \end{aligned}$$



$$\text{J} \Rightarrow (\text{ジュール})$$

<問題5>

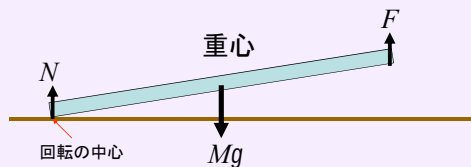
1. 質量 M [kg], 長さ l [m] の丸太が地面に横たわっている。



(1) その一方の端を手で持ち上げるには、どれだけの力が必要か。

$$\begin{aligned} \text{外力の総和} \quad F + N - Mg &= 0 \\ \text{トルクの総和} \quad Mg \cdot l/2 - F \cdot l &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore F &= Mg/2 \\ N &= Mg/2 \end{aligned}$$



(2) 一方の端を高さ h まで持ち上げるとき、手が
する仕事は、丸太の位置エネルギーの増加に等し
いことを確かめよ。

$$\begin{aligned} \text{手がする仕事} &= Fh = (Mg/2) \times h = Mgh/2 \\ \text{丸太の位置エネルギーの増加} &= Mg \times (h/2) = Mgh/2 \end{aligned}$$

