

問題 1 $x = l \cdot \sin \theta$ と $y = l \cdot \cos \theta$ を時間で 2 回微分すると次のようになる。確かめよ。ただし l は定数である。

$$(1) \frac{d^2 x}{dt^2} = l \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d \sin \theta}{dt} \right) = l \cdot \frac{d}{dt} \left(\cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) = -l \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + l \cdot \cos \theta \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$(2) \frac{d^2 y}{dt^2} = l \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d \cos \theta}{dt} \right) = l \cdot \frac{d}{dt} \left(-\sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) = -l \cdot \cos \theta \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - l \cdot \sin \theta \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

問題 2 問題 1 の計算結果を教科書 19 頁～20 頁にある単振子の運動方程式 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F \sin \theta$ と

$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - F \cos \theta$ に代入すると次のように書ける。確かめよ。

$$(1) m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F \sin \theta \quad \rightarrow \quad ml \cdot \cos \theta \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = ml \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - F \sin \theta$$

$$(2) m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - F \cos \theta \quad \rightarrow \quad -ml \cdot \sin \theta \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = ml \cdot \cos \theta \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mg - F \cos \theta$$

問題 3 問題 2 の (1) の両辺に $\cos \theta$ を掛けたものから (2) の両辺に $\sin \theta$ を掛けたものを引くと次の式を得る。確かめよ。

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \cdot \sin \theta$$

問題 4 問題 2 の (1) の両辺に $\sin \theta$ を掛けたものに (2) の両辺に $\cos \theta$ を掛けたもの足すと次の式を得る。確かめよ。

$$F = ml \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mg \cdot \cos \theta$$

問題 5 おもりに長さ l [m] の糸をつけ、その端を支点に固定し、支点を通る鉛直軸のまわりでおもりに等速度回転をさせる (円錐振り子)。糸が鉛直と角 θ [rad] をなして回転しているとき、回転の角速度 ω [rad/s] を表す式を求めよ。

