

基礎物理学

担当 小野正利
onomasat@hoku-iryo-u.ac.jp

第6回(2)

教科書

(1)「基礎物理学」

(2) <http://www.hoku-iryo-u.ac.jp/~onomasat/>



(3) 減衰振動

調和振動 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

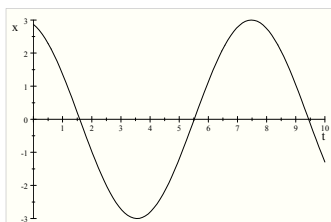
摩擦力 $f_f = -m\gamma v = -m\gamma \frac{dx}{dt}$ が加わる時,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - m\gamma \frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

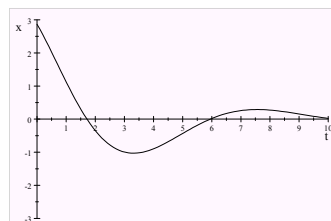
調和振動 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$
 $x = a \sin(\omega_0 t + \delta)$

$x(t) = 3 \cos(0.8t + 0.3)$



$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - m\gamma \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$
 $\gamma < \omega_0$ (減衰振動) $x = ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \delta)$
 ここで, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$x(t) = 3 \exp(-0.3t) \cos(\sqrt{(0.8)^2 - (0.3)^2} \cdot t + 0.3)$

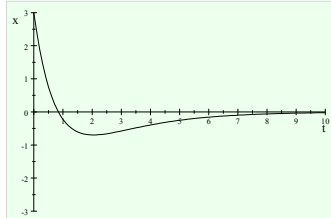


$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - m\gamma \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\gamma > \omega_0 \quad (\text{過減衰}) \quad x = C_+ e^{-p_+ t} + C_- e^{-p_- t}$$

$$\text{ここで, } -p_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (< 0)$$

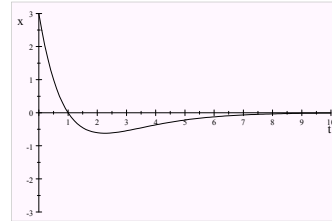
$$x(t) = -3 \exp\left(\left(-0.9 + \sqrt{(0.9)^2 - (0.8)^2}\right)t\right) + 6 \exp\left(\left(-0.9 - \sqrt{(0.9)^2 - (0.8)^2}\right)t\right)$$



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - m\gamma \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\gamma = \omega_0 \quad (\text{臨界減衰}) \quad x = (C + D \cdot t) e^{-\gamma t}$$

$$x(t) = (3 - 3t) \exp(-0.8t)$$



(4) 強制振動

摩擦力 $f_f = -m\gamma v = -m\gamma \frac{dx}{dt}$ と共に,

強制力 $f(t) = f_0 \cos \omega t$ が働くとき。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - m\gamma \frac{dx}{dt} + f_0 \cos \omega t$$

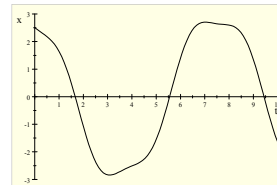
$$\rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \cos \omega t$$

$$\left(\rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega t \right)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - m\gamma \frac{dx}{dt} + f_0 \cos \omega t \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega t$$

$$\gamma = 0, \quad x(t) = a \cos(\omega_0 t + \delta) + \left(\frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

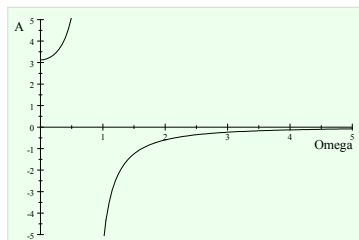
$$x(t) = 3 \cos(0.8t + 0.3\delta) + \left(\frac{2}{(0.8)^2 - (2.5)^2} \right) \cdot \cos(2.5t)$$



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - m\gamma \frac{dx}{dt} + f_0 \cos \omega t \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega t$$

$$\gamma = 0, \quad x(t) = a \cos(\omega_0 t + \delta) + \left(\frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$A = \left(\frac{2}{(0.8)^2 - \omega^2} \right)$$



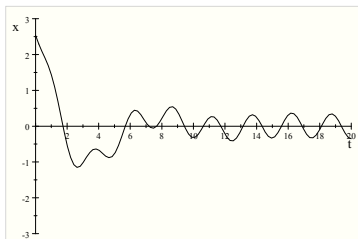
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - m\gamma \frac{dx}{dt} + f_0 \cos \omega t \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega t$$

$$\gamma \neq 0, \quad x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_1(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{減衰振動, 過減衰,} \\ \text{臨界減衰の何れかの表式} \end{array} \right\}$$

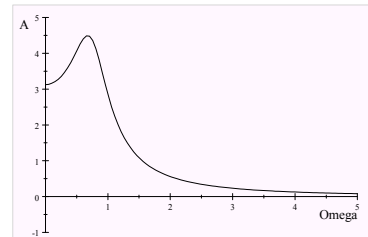
$$x_2(t) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi)$$

$$x(t) = 3 \exp(-0.3t) \cos(\sqrt{(0.8)^2 - (0.3)^2} \cdot t + 0.3) + \frac{2}{\sqrt{((0.8)^2 - (2.5)^2)^2 + 4(0.3)^2(2.5)^2}} \cdot \cos(2.5t - \phi)$$



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_1(t) + \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi)$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{((0.8)^2 - \omega^2)^2 + 4(0.3)^2 \cdot \omega^2}}$$



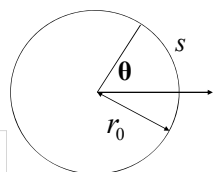
2. 中心力による運動

(1) 等速円運動

$$\theta = \frac{s}{r_0} \quad (\text{rad: ラジアン})$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\left(\frac{s}{r_0}\right)}{dt} = \frac{1}{r_0} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{r_0}$$

$$v = \omega \cdot r_0$$



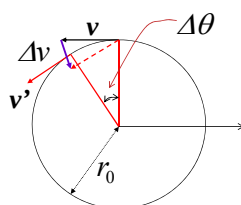
v と v' の大きさは等しい
(等速度円運動)。

$$\Delta\theta = \frac{\Delta v}{v}$$

加速度

$$a \Leftrightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v \cdot \Delta\theta}{\Delta t} = v \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow v \cdot \omega$$

$$a = v \cdot \omega = v \cdot \frac{v}{r_0} = \frac{v^2}{r_0} = r_0 \cdot \frac{v^2}{r_0^2} = r_0 \cdot \omega^2$$



(2) 惑星の運動

ケプラーの法則

第1法則 惑星の軌道は太陽の位置を焦点の一つとする楕円軌道。

第2法則 惑星と太陽を結ぶ直線が単位時間に掃過する面積は一定。

第3法則 惑星が太陽の回りをまわる周期の2乗は楕円軌道の長半径の3乗に比例する。

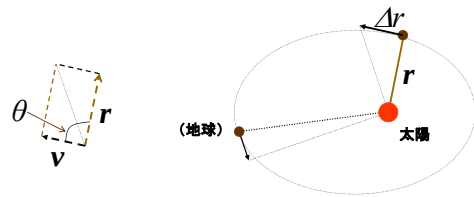
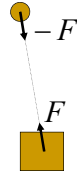
全ての物体の間には質量を持つことによる引力が働く。

引力の方向は物体を結ぶ方向であり、大きさは2つの物体の質量の積に比例し、距離の2乗に反比例する。

$$\text{万有引力 } F = -G \frac{Mm}{r^2}$$

万有引力定数

$$G = 6.6725 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$$



$r \cdot \Delta r \cdot \sin \theta$ 掃過する面積の2倍

$$r \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \sin \theta \Rightarrow r \cdot v \cdot \sin \theta = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$$

1秒間に掃過する面積の2倍

3. 角運動量保存の法則

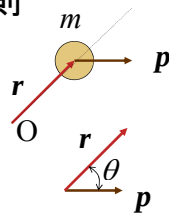
運動量

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

角運動量

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$|\mathbf{l}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = r \cdot p \cdot \sin \theta$$



4. 相対運動

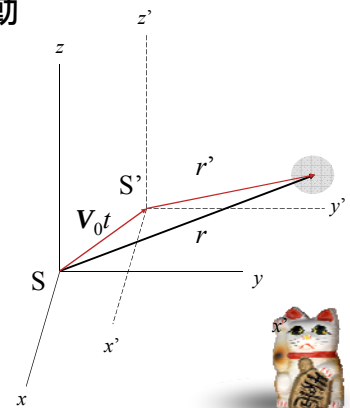
ガリレイ変換

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}_0 t$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}_0$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2}$$

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}', t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$$

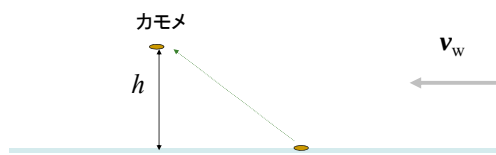


<例>

一様な風を受けて飛び立つカモメに働く揚力

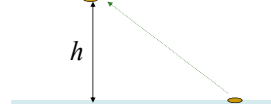
カモメの質量 : m

風の速さ : v_w

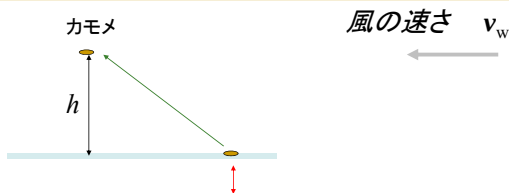


カモメ

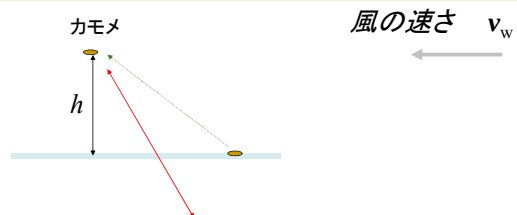
風の速さ v_w



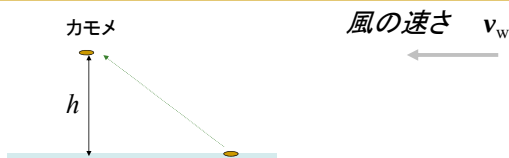
風と一緒に移動する人の立場でカモメの海面からの高さとその時に持つ速度の間に成り立つ力学的エネルギー E の保存を考える。



最初海面上に居るカモメの力学的エネルギーは、 $E = \frac{1}{2}mv_w^2$ 。
(位置エネルギーはゼロ)



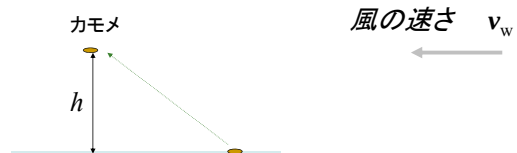
カモメが羽ばたかないで舞い上がることができる海面からの最高点を h で表すと、その時のカモメの力学的エネルギーは、 $E = mgh$ 。
(この時の運動エネルギーはゼロ)



力学的エネルギーが保存されるとすると、

$$mgh = \frac{1}{2}mv_w^2 \quad \text{が成り立つ。}$$

従って、最高点は $h = \frac{v_w^2}{2g} [\text{m}]$

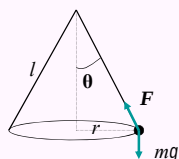


$$v_w = 10 \text{ m/s} \text{ のとき, } h = \frac{v_w^2}{2g} = \frac{10^2}{2(9.8)} \cong 5.1 \text{ m}$$

参考： $36 \text{ km/h} \cong 36000 / (60 \times 60) = 10 \text{ m/s}$

<問題6>

2. おもりに長さ l [m] の糸をつけ、その端を支点に固定し、支点を通鉛直軸のまわりでおもりに等速度回転をさせる。糸が鉛直と角 θ [rad] をなすとき、回転の角速度 ω [rad/s] を表す式を求めよ。



向心力： $F \sin \theta$, 遠心力： $mr\omega^2 = m(l \sin \theta)\omega^2$

鉛直方向の釣り合い： $F \cos \theta - mg = 0$

水平方向の釣り合い： $-F \sin \theta + m(l \sin \theta)\omega^2 = 0$

$$F = \frac{mg}{\cos \theta}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}} = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\cos \theta}}$$

ただし、 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

