

問題1 フープ応力(教科書31頁)の表式を導け。

<略解>

容器内の圧力を p で表す。

- σ を横方向の応力(フープ応力)

次の関係が成り立つ,

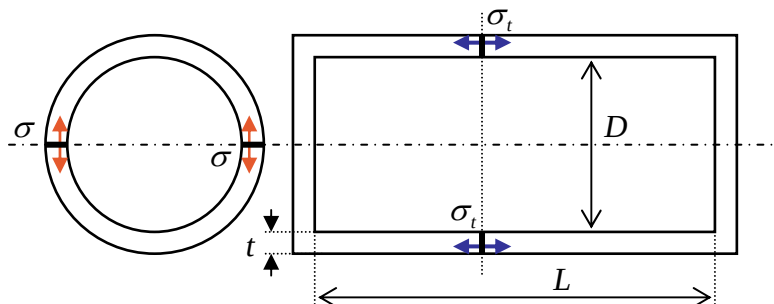
$$2\sigma L t = p D L$$

従って, $\sigma = \frac{Dp}{2t}$ 。

- σ_t 縦方向の応力

次の関係が成り立つ,

$$2\pi \frac{D}{2} t \sigma_t = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 p \quad \text{従って, } \sigma_t = \frac{Dp}{4t}$$



[計算] 圧力 $p = 2000 \text{ hPa}$, $L = 1.0 \text{ m}$, $D = 0.40 \text{ m}$, $t = 0.010 \text{ m} = 1.0 \text{ cm}$ のとき, 横方向の応力(フープ応力)と縦方向の応力の値を求めよ。

(略解)

横方向応力(フープ応力) $\sigma = \frac{Dp}{2t} = \frac{0.4\text{m} \times 2000\text{hPa}}{2 \times 0.010\text{m}} = \frac{0.4\text{m} \times 2000 \times 100 \text{ Pa}}{2 \times 0.010\text{m}} = 4.0 \times 10^6 \text{ Pa}$

縦方向応力 $\sigma_t = \frac{Dp}{4t} = \frac{0.4\text{m} \times 2000\text{hPa}}{4 \times 0.010\text{m}} = \frac{0.4\text{m} \times 2000 \times 100 \text{ Pa}}{4 \times 0.010\text{m}} = 2.0 \times 10^6 \text{ Pa}$

問題2 (教科書34頁, <問題9>8) 直径5cmの丸棒が, 1,000 kgwの引っ張り荷重で0.1cm伸びるという。この荷重を10cmの高さから落下させるときの衝撃応力と伸びを求めよ。

(注) 2頁の問題3を参照。

<略解>

$$A = \pi \left(\frac{5\text{cm}}{2} \right)^2, \quad \lambda_0 = 0.1\text{cm}, \quad h = 10\text{cm}, \quad \sigma_0 = \frac{1,000 \text{ kgw}}{A} \quad \text{のように値が求まる。こ}$$

これらの値を $\sigma = \sigma_0 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_0}} \right]$ 及び, $\lambda = \lambda_0 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_0}} \right]$ に代入すると, 前者から衝撃応力,

後者からそれに伴う伸びが求まる。

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_0}} \right] = \frac{1000 \times 9.8\text{N}}{3.14 \times \left(\frac{5\text{cm}}{2} \right)^2} \times \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 10}{0.1}} \right] = 499.36 \times 15.18 \cong 7579 \text{ N/cm}^2$$

$$\lambda = \lambda_0 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_0}} \right] = 0.1\text{cm} \times \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 10}{0.1}} \right] \cong 0.1\text{cm} \times 15.18 = 1.518\text{cm}$$

問題3 衝撃応力(教科書31頁)の表式とその時の伸びに関する表式を導け。

<略解>

質量 $M(=W/g)$ の物体を落下させて受け台に衝突して棒が λ 伸びたとき、棒の位置エネルギーの減少分はつぎのように書ける： $W(h+\lambda)$ 。

棒が λ 伸びたとき断面に発生する応力を σ で表すと、棒に吸収される弾性エネルギー(棒の断面積を A で表す)は次のように表すことができる：

$$\frac{1}{2} \lambda A \sigma$$

減少した位置エネルギーの全てが棒の弾性エネルギーになると仮定すると次の関係を得る：

$$W(h+\lambda) = \frac{1}{2} \lambda A \sigma$$

ここで、棒の縦弾性係数を E で表すと、 $\sigma = E \frac{\lambda}{l}$ となる。あるいは $\lambda = \frac{l\sigma}{E}$ である。また、静かに質量

M の物体を載せたときに棒の断面に発生する応力を $\sigma_0 \left(\equiv \frac{W}{A} \right)$ 、その時の伸びを λ_0 とすると、

$\sigma_0 = E \frac{\lambda_0}{l}$ である。この関係を使うと、 $\lambda = \frac{l\sigma}{E} = l \frac{\sigma}{E} = E \frac{\lambda_0}{\sigma_0} \frac{\sigma}{E} = \lambda_0 \frac{\sigma}{\sigma_0}$ となる。従って、

$$W(h+\lambda) = \frac{1}{2} \lambda A \sigma \rightarrow \sigma_0(h+\lambda) = \frac{1}{2} \lambda \sigma \rightarrow \sigma^2 - 2\sigma_0\sigma - \sigma_0^2 \frac{2h}{\lambda_0} = 0$$

このように二次方程式に書き直すことができ、解は

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_0}} \right]$$

と求まる。 σ は正なので $\pm$ 記号の中の $+$ 記号を選ぶ。従って、 $\sigma = \sigma_0 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_0}} \right]$ が発生する

応力である。

また、伸び λ は

$$\lambda = l \times \frac{\sigma}{E} = \left(E \frac{\lambda_0}{\sigma_0} \right) \times \frac{\sigma}{E} = \lambda_0 \frac{\sigma}{\sigma_0} = \lambda_0 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_0}} \right]$$

となる。

