生 体 力 学

第８回

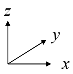
2010年　11月 18日（木）

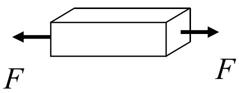
◎ 材料の変形（４）

E：縦弾性係数（ヤング率）

1．ポアソン比　e

$$e = -\frac{\text{横ひずみ}}{\text{軸ひずみ（縦ひずみ）}} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$





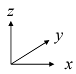
$$e = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

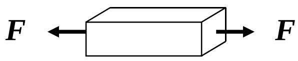
E：縦弾性係数（ヤング率）

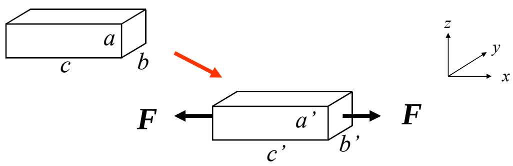
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -e\varepsilon_x = -e\frac{\sigma_x}{E}$$

↑

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$



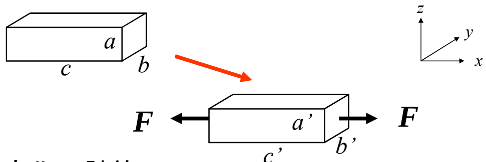




$$a' = a + \Delta a = a\left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \equiv a(1+\varepsilon_z)$$

$$b' = b + \Delta b = b\left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \equiv b(1+\varepsilon_y)$$

$$c' = c + \Delta c = c\left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) \equiv c(1+\varepsilon_x)$$



体積変化の計算

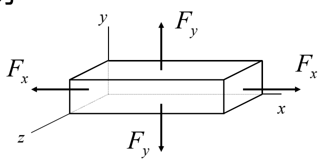
$$\begin{aligned}\Delta V &= a'b'c' - abc \\ &= abc(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - abc \\ &\cong abc(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = abc(1-2e)\varepsilon_x\end{aligned}$$

$$\because\ \varepsilon_y = \varepsilon_z = -e\varepsilon_x = -e\frac{\sigma_x}{E}$$

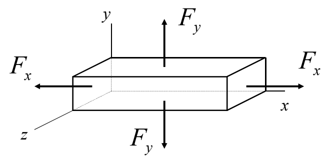
2．2軸と3軸応力

ポアソン比は一つ以上の垂直応力が存在する場合にも役に立つ。

2軸応力



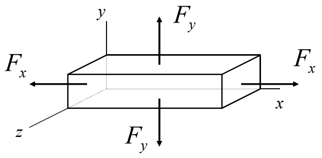
$$\sigma_x = \frac{F_x}{A_x} \qquad \varepsilon_{x1} = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_{z1} = \varepsilon_{y1} = -e\varepsilon_{x1} = -e\frac{\sigma_x}{E}$$



$$\sigma_x = \frac{F_x}{A_x} \qquad \varepsilon_{x1} = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_{z1} = \varepsilon_{y1} = -e\varepsilon_{x1} = -e\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_y} \qquad \varepsilon_{y2} = \frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_{z2} = \varepsilon_{x2} = -e\varepsilon_{y2} = -e\frac{\sigma_y}{E}$$

x ， y ，z 方向の合成ひずみ

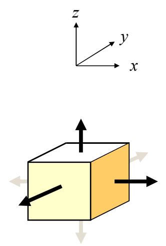


$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2} = \frac{\sigma_x}{E} - e\frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y1} + \varepsilon_{y2} = \frac{\sigma_y}{E} - e\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z1} + \varepsilon_{z2} = -e\frac{\sigma_x}{E} - e\frac{\sigma_y}{E}$$

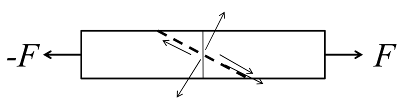
3軸応力



3．主応力

A. 組み合わせ応力

二つの直角方向の荷重に伴い，任意の断面に発生する応力は，断面の傾きに応じて垂直応力、せん断応力が発生する。



B. 主面と主応力

ある断面に垂直応力とせん断応力が発生しているとき，材料内の一点を通り，直角に交わる面を考え，
一方には垂直の最大応力，
他方には垂直の最小応力が働くようにできる。
これらの面を主面（主応力面），働いている力を主応力と言う。

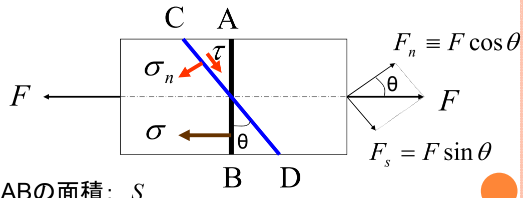
（1）主面ではせん断応力がゼロである。

（2）最大のせん断応力は $\sigma_{x'} = \sigma_{y'}$ が成り立つ二つの直交する面で発生する。

3. モールの応力円

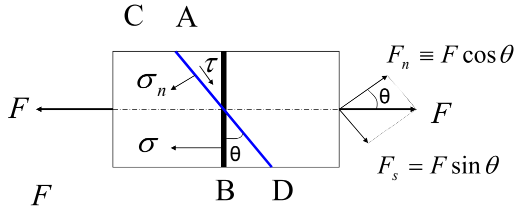
応力変換 ： AB面の応力 $\sigma = \dfrac{F}{S}$ と

CD面の応力 σ_n と τ の関係



断面ABの面積： S
断面CDの面積： $S/\cos\theta$

断面ABの面積： S
断面CDの面積： $S/\cos\theta$

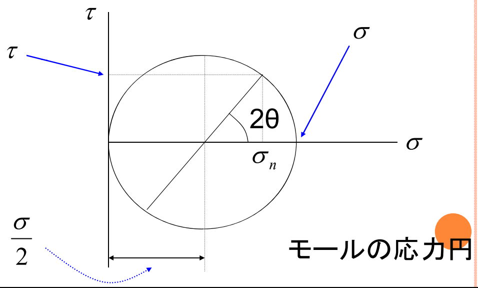


$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S/\cos\theta} = \frac{F}{S}\cos^2\theta \quad , \quad \tau = \frac{F}{S}\cos\theta\sin\theta$$

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S/\cos\theta} = \frac{F}{S}\cos^2\theta = \sigma\cos^2\theta = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2}\cos 2\theta$$

$$\tau = \frac{F_s}{S/\cos\theta} = \frac{F}{S}\cos\theta\sin\theta = \frac{\sigma}{2}\sin 2\theta \qquad \left(\because \ \sigma = \frac{F}{S}\right)$$



モールの応力円

主面と主応力について

構造物内の任意の点における応力を考える。この点を通る最大の垂直応力と最小の垂直応力を見つけることができる。これらを主応力と呼ぶ。

そして，この最大と最小の垂直応力を持つ面を主応力面あるいは主面と呼ぶ。

＜問題8＞

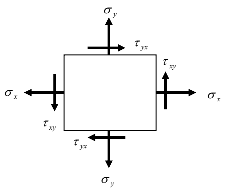
1．適切な表現で以下の定義を完成せよ。
(1)（ポアソン比）
(2)（主応力）
(3)（主応力面）
(4)（モールの応力円）

＜問題8＞

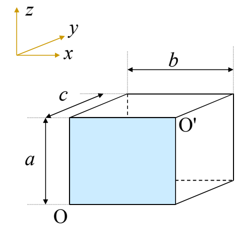
２．ある面にせん断応力が発生しているときには，必ずこれに垂直な方向にも大きさの等しいせん断応力が発生していることを示せ。

言い換えると，右下の図で $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ であることを示せ。

なお，これらのせん断応力を共役せん断応力と呼んでいる。



物体が回転しない条件を考えるとよい。

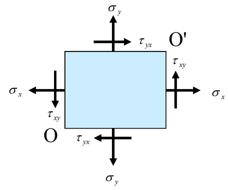


O を通る y 方向の軸の回りに回転しない条件は次の通り。

$$a \times \tau_{yx} \cdot b \cdot c - b \times \tau_{xy} \cdot a \cdot c = 0$$

$$\therefore \ \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

これで示された。



［補足］　角度θの回転