生 体 力 学

第12回

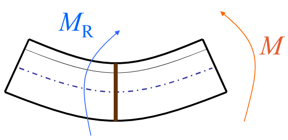
2011年 1月20日（木）

物理量	エナメル質	象牙質	単位
圧縮強さ	384	297	MPa
引っ張り強さ	10.4～21.9	105.5	MPa
比例限度（圧縮）	353	167	MPa
弾性率	84.1	14.7	GPa
ポアソン比	0.33	0.31	
密度	2.97	2.14	g/cm^3
ビッカース硬さ	408	60	
熱伝導率	2.23	1.36	mcal/sec・cm・°C

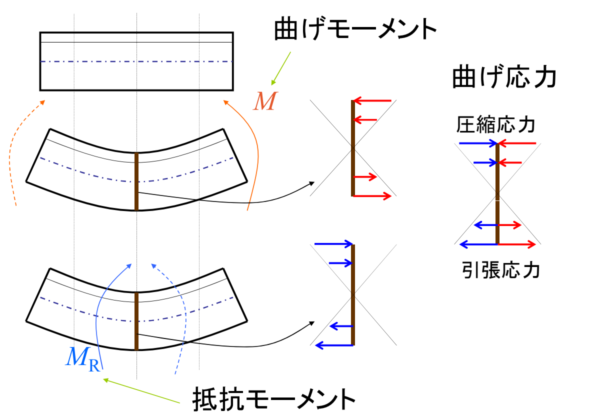
◎ 材料の変形（８）

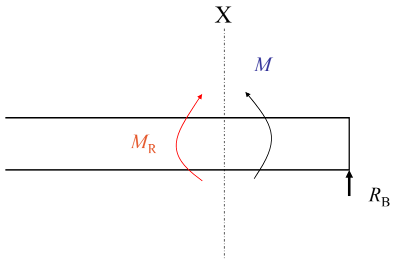
１．曲げ応力と抵抗モーメント

抵抗モーメント M_R は，曲げ作用のために材料内部に発生した応力に伴って生じる。

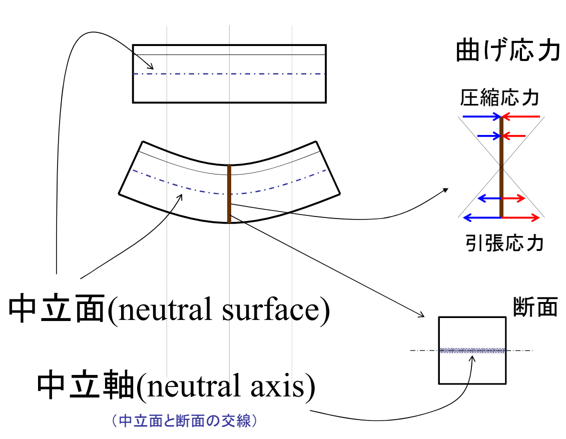


任意の断面の M_R はその断面の曲げモーメント M と同じ大きさである。





任意の断面の M_R はその断面の
曲げモーメント M と同じ大きさである。

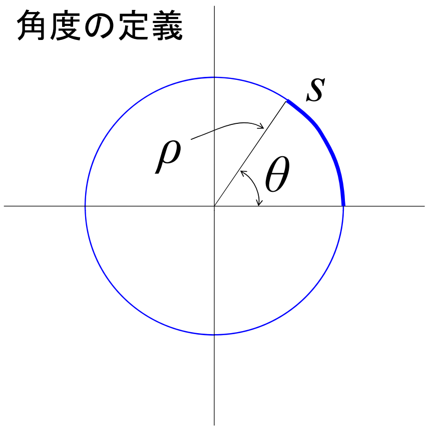


曲げ応力
→ 曲げのためにはりに生ずる応力。

中立面(neutral surface)
→ はりが曲がるとき伸縮しない面。

中立軸(neutral axis)
→ はりの軸に垂直な断面が中立面
と交わる直線。

角度の定義

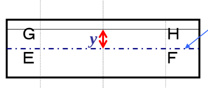


$$\theta = \frac{s}{\rho}$$

$$s = \theta\rho$$

$$\rho = \frac{s}{\theta}$$

はりの湾曲



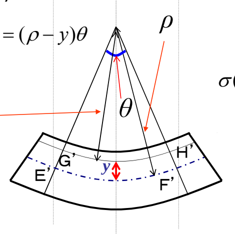
$$GH = EF = E'F' = \rho\frac{E'F'}{\rho} = \rho\theta$$

$$G'H' = (\rho - y)\frac{G'H'}{(\rho - y)} = (\rho - y)\theta$$

$$\varepsilon(y) = \frac{GH - G'H'}{EF} = \frac{y}{\rho}$$

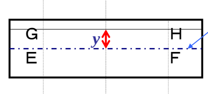
$$\sigma(y) = E\varepsilon(y) = E\frac{y}{\rho}$$

$(\rho - y)$



（ここでは圧縮の方向を正と定義）

はりの湾曲



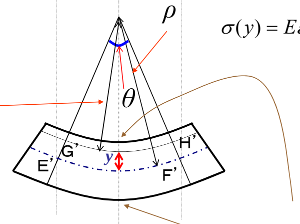
$$GH = EF = E'F' = \rho\theta$$

$$G'H' = (\rho - y)\theta$$

$$\varepsilon(y) = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma(y) = E\varepsilon(y) = E\frac{y}{\rho}$$

$(\rho - y)$



（ここでは圧縮の方向を正と定義）

縁（ふち）応力

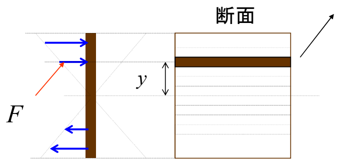
○ 中立面から任意の距離 y にある面の

ひずみ $\varepsilon(y)$ は y に比例 $\rightarrow$ $\varepsilon(y)=\dfrac{y}{\rho}$

○ 従ってその層に発生している応力 $\sigma(y)$ も

y に比例 $\rightarrow$ $\sigma(y)=E\varepsilon(y)=E\dfrac{y}{\rho}$

抵抗モーメント M_R の計算



この部分の面積を Δa で表す。

この部分に働く力Fは
$F=\sigma(y)\Delta a$
と書ける。

このカによるモーメントは $\Delta M_R=y\cdot F$ となる。

$$\boxed{M_R=\sum \Delta M_R=\frac{E}{\rho}I}$$

I： 断面二次モーメント $\qquad I\equiv\sum y^2\Delta a$

○ I は断面の形状によって一定の値を持つ。

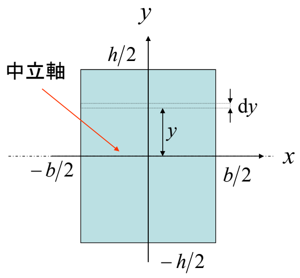
$$\boxed{M_R=\sum \Delta M_R=\frac{E}{\rho}I \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\rho}=\frac{M_R}{EI}}$$

と書くこともできる。EI を 曲げこわさ という。

○ M_R は M（曲げモーメント）と大きさが等しいので，M に置き換え可能である。以後，M と M_R の意味を区別しないで使う。

2．断面二次モーメントの計算例

$$I=\sum y^2\Delta a=\iint y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

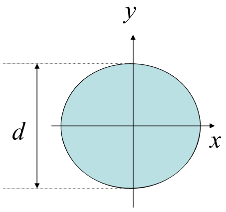


$$I=\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-b/2}^{b/2}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=b\int_{-h/2}^{h/2}y^2\mathrm{d}y$$
$$=\frac{bh^3}{12}$$

断面が円であるときの計算

$$x^2+y^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2 \rightarrow y^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2-x^2$$

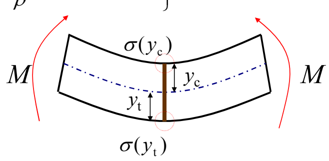
$$I=\iint_{円内}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



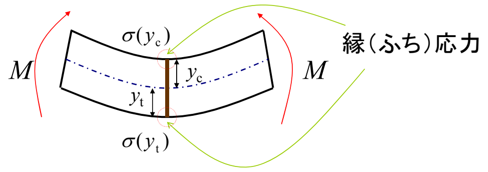
$$=\int_{-d/2}^{d/2}\left(\int_{-\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-x^2}}^{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-x^2}}y^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{64}d^4$$

3．断面係数 $Z_b\left(\equiv\dfrac{I}{y_b}\right)$

$$\left.\begin{aligned}&\sigma(y)=E\varepsilon(y)=E\frac{y}{\rho}=\frac{E}{\rho}y\\&M=M_R=\frac{E}{\rho}I\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad M=\frac{E}{\rho}I=\frac{\sigma(y)}{y}I$$



$$\boxed{M=\frac{\sigma(y_c)}{y_c}I=\frac{\sigma(y_t)}{y_t}I}$$

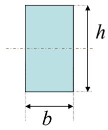
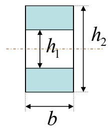


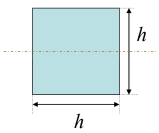
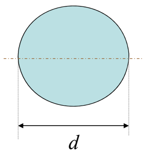
$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{\sigma(y_c)}{y_c} I = \sigma(y_c)\frac{I}{y_c} \equiv \sigma(y_c) Z_c \\ M &= \frac{\sigma(y_t)}{y_t} I = \sigma(y_t)\frac{I}{y_t} \equiv \sigma(y_t) Z_t \end{aligned}\right\} \Rightarrow M \equiv \sigma(y_b) Z_b$$

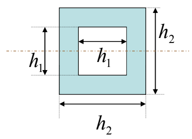
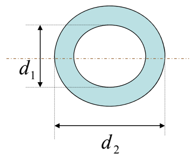
断面係数　Z_b　　$Z_b \equiv \dfrac{I}{y_b}$

b は t か c のいずれかを意味する。

各種の断面の面積 A，断面二次モーメント I，断面係数 Z の例

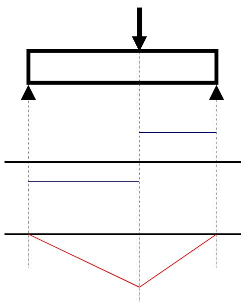
断面	A	I	Z
	bh	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{6}bh^2$
	$b(h_2-h_1)$	$\frac{1}{12}b(h_2^3-h_1^3)$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{b(h_2^3-h_1^3)}{h_2}$

断面	A	I	Z
	h^2	$\frac{1}{12}h^4$	$\frac{1}{6}h^3$
	$\frac{\pi}{4}d^2$	$\frac{\pi}{64}d^4$	$\frac{\pi}{32}d^3$

断面	A	I	Z
	$h_2^2-h_1^2$	$\frac{1}{12}\left(h_2^4-h_1^4\right)$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{h_2^4-h_1^4}{h_2}$
	$\frac{\pi}{4}\left(d_2^2-d_1^2\right)$	$\frac{\pi}{64}\left(d_2^4-d_1^4\right)$	$\frac{\pi}{32}\cdot\frac{d_2^4-d_1^4}{d_2}$

4．危険断面

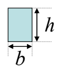
はりの強さは、通常曲げモーメントで評価する。

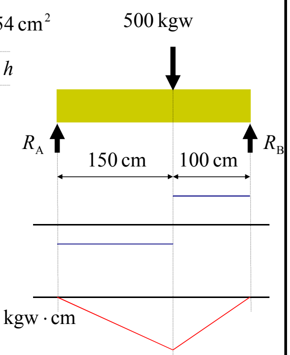


危険断面
最大曲げ応力が発生している断面。

断面積　$b \times h = 6\,\mathrm{cm} \times 9\,\mathrm{cm} = 54\,\mathrm{cm}^2$

$R_A = 200\,\mathrm{kgw}$
$R_B = 300\,\mathrm{kgw}$





最大せん断応力　τ_{max}

$F_{max} = 300\,\mathrm{kgw}$

$$\tau_{max} = \frac{300\,\mathrm{kgw}}{54\,\mathrm{cm}^2} \cong 5.56\,\mathrm{kgw/cm}^2$$

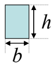
最大曲げ応力　σ_{max}

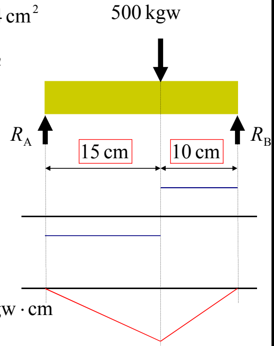
$$|M_{max}| = 200\,\mathrm{kgw} \times 100\,\mathrm{cm} = 20{,}000\,\mathrm{kgw\cdot cm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{Z} = \frac{20{,}000\,\mathrm{kgw\cdot cm}}{\left(\frac{bh^2}{6}\right)} \cong 246.9\,\mathrm{kgw/cm}^2$$

断面積　$b \times h = 6\,\mathrm{cm} \times 9\,\mathrm{cm} = 54\,\mathrm{cm}^2$

$R_A = 200\,\mathrm{kgw}$
$R_B = 300\,\mathrm{kgw}$





最大せん断応力　τ_{max}

$F_{max} = 300\,\mathrm{kgw}$

$$\tau_{max} = \frac{300\,\mathrm{kgw}}{54\,\mathrm{cm}^2} \cong 5.56\,\mathrm{kgw/cm}^2$$

最大曲げ応力　σ_{max}

$$|M_{max}| = 200\,\mathrm{kgw} \times 10\,\mathrm{cm} = 2{,}000\,\mathrm{kgw \cdot cm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{Z} = \frac{2{,}000\,\mathrm{kgw \cdot cm}}{\left(\frac{bh^2}{6}\right)} \cong 24.69\,\mathrm{kgw/cm}^2$$

5．はりの断面寸法の決め方

危険断面に生ずる 最大曲げモーメント と材料の許容応力 σ_b から断面係数 Z_b が求まる。

$$M_{max} = \sigma_b Z_b$$

縁応力を小さくするためには，大きな断面係数を持つ断面を選ぶ。

例　最大曲げモーメントが　40,000 kgw・cm 許容応力が　2,000 kgw/cm² のとき，必要とする断面係数の値を次のように計算することができる。

$$M_{max} = \sigma_b Z_b \qquad \text{から}$$

$$Z = \frac{M}{\sigma_b} = \frac{40{,}000\,\mathrm{kgw \cdot cm}}{2{,}000\,\mathrm{kgw/cm}^2} = 20\,\mathrm{cm}^3$$

例　断面係数 Z が 60 cm³ である場合の断面の色々。

○ 断面が直径 d [cm] の円の場合

$$Z = \frac{\pi d^3}{32} \qquad \text{から} \qquad d = \sqrt[3]{\frac{32Z}{\pi}} \cong 8.49\,\mathrm{cm}$$

$$\text{断面積} = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cong 56.6\,\mathrm{cm}^2$$

○ 断面が一辺 h [cm] の正方形の場合

$$Z = \frac{h^3}{6} \qquad \text{から} \qquad h = \sqrt[3]{6Z} \cong 7.11\,\mathrm{cm}$$

$$\text{断面積} = h^2 \cong 50.5\,\mathrm{cm}^2$$

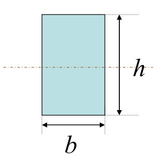
○ 断面が，高さ h [cm] 幅 b [cm] の長方形の場合

$$Z = \frac{bh^2}{6} \qquad \text{から}$$

仮に，$h = 2b$とすると，

$$b = \sqrt[3]{\frac{3Z}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 60}{2}} \cong 4.48\,\mathrm{cm}$$

$$h = 2b \cong 8.96\,\mathrm{cm}$$



$$\text{断面積} = bh \cong 40.1\,\mathrm{cm}^2$$

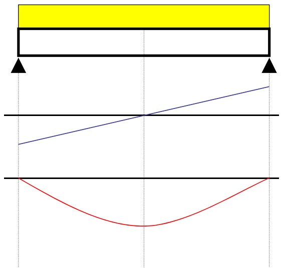
6．曲げモーメントとせん断力の関係

はりにかかる等分布荷重 ω，せん断力 F，曲げモーメント M の間には次の関係がある。

$$\omega = -\frac{dF}{dx}, \qquad F = -\frac{dM}{dx}$$

（曲げモーメントとせん断力の関係の例）

はりにかかる等分布荷重 ω,
せん断力 F, 曲げモーメント M
の間には次の関係がある。

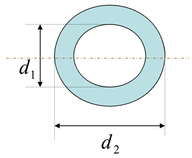


$$\omega = -\frac{dF}{dx}, \quad F = -\frac{dM}{dx}$$

第12回

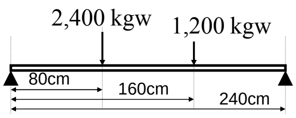
＜問題12＞

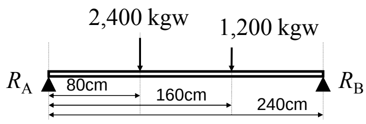
１．外径 8 cm，内径 4 cm の中空円の I（断面二次モーメント）と Z（断面係数）の値を求めよ。

断面	A	I	Z
	$\frac{\pi}{4}\left(d_2^{\,2} - d_1^{\,2}\right)$	$\frac{\pi}{64}\left(d_2^{\,4} - d_1^{\,4}\right)$	$\frac{\pi}{32} \cdot \frac{d_2^{\,4} - d_1^{\,4}}{d_2}$

＜問題12＞

２．図のようなはりの断面係数はいくらあればよいか。最大の縁（ふち）応力の値を σ_b=800 kgw/cm^2 とする。



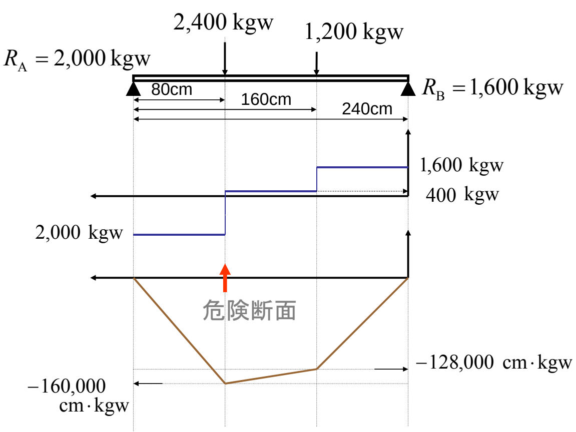


$$R_A + R_B - 2{,}400\ \text{kgw} - 1{,}200\ \text{kgw} = 0$$

$$-240\ \text{cm} \times R_B + 160\ \text{cm} \times 1{,}200\ \text{kgw} + 80\ \text{cm} \times 2{,}400\ \text{kgw} = 0$$

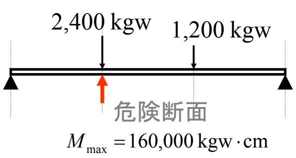
$$\therefore\ R_B = 1{,}600\ \text{kgw}$$

$$R_A = 2{,}000\ \text{kgw}$$



図のようなはりの断面係数はいくらあればよいか。最大の縁（ふち）応力の値を σ_b=800 kgw/cm^2 とする。

$$M_{max} = \sigma_b Z_b$$



$$\therefore\ Z_b = \frac{M_{max}}{\sigma_b} = \frac{160{,}000\ \text{kgw} \cdot \text{cm}}{800\ \text{kgw/cm}^2} = 200\ \text{cm}^3$$