

生体力学

第7回

2009年 11月19日(木)



第6回つづき

3. ひずみエネルギー

A 材料の弾性変形と内部に蓄えられるエネルギー

B 弾性エネルギーの計算

単位体積あたりのエネルギー:

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (\text{kgw} \cdot \text{cm}/\text{cm}^3)。$$

σ が **弾性限度** の時,
 u を **最大弾性エネルギー** と言う。

最大弾性エネルギーの大きい材料は、
容易に破壊せず多くのエネルギーを吸収する。

弾性限度が高い材料や
縦弾性係数(ヤング率)の小さい材料は
↓
最大弾性エネルギーが大きくなる。

$$\therefore u = \frac{\sigma^2}{2E}$$

<問題6>

3. ゴムの縦弾性係数を $1 \text{ kg}/\text{cm}^2$,
弾性限度を $80 \text{ kg}/\text{cm}^2$ とすると
最大弾性エネルギーはいくらになるか。

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad \text{に値を代入して求めよ。}$$

(略解)

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{80 \times 80}{2 \times 1} = 3200 \text{ kgw} \cdot \text{cm}/\text{cm}^3 \\ &= 3200 \times 9.8 \times 10^4 \text{ N}/\text{m}^2 \\ &= 3.136 \times 10^8 \text{ N}/\text{m}^2 \end{aligned}$$

<問題6>

4. 軟鋼とゴムの最大弾性エネルギーを比較してみよ。

軟鋼の縦弾性係数: $2.1 \times 10^6 \text{ kgw/cm}^2$

ゴムの縦弾性係数: 1.0 kgw/cm^2

ゴムの弾性限度: 2000 kgw/cm^2

軟鋼の弾性限度: 80 kgw/cm^2

[略解]

軟鋼の単位体積当たりの最大弾性エネルギー

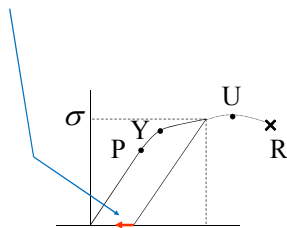
$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{2000 \times 2000}{2 \times 2.1 \times 10^6} \cong 0.952 \text{ kgw} \cdot \text{cm/cm}^3 \\ \cong 9.3296 \times 10^4 \text{ J/m}^3$$

ゴムの単位体積当たりの最大弾性エネルギー

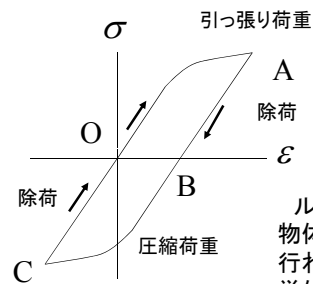
$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{80 \times 80}{2 \times 1} = 3200 \text{ kgw} \cdot \text{cm/cm}^3 \\ = 3.136 \times 10^8 \text{ J/m}^3$$

4 弾性余効

荷重を取り除いた後、時間と共にひずみの減少する現象 → 弾性余効



5. ヒステレシスループ



ループで囲まれる面積は物体の変形を起こすために行われた仕事のうち、単位体積当たり、熱となって発散されるエネルギーを表す。



<問題6>

1. 径 4 cm の軟鋼棒の両端を 20°C で壁に固定してから、温度を 60°C にあげた。どんな熱応力がいくら発生しているか。また、棒の端面が壁に及ぼしている力 F はどれほどか。

ここで、 $\alpha = 11.5 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

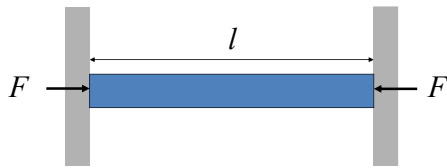
$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgw/cm}^2$ とする。

(略解)

$$\sigma' = -E \frac{l' - l}{l} = -E \frac{\lambda}{l} = -E \alpha (t' - t) \cong -9.5 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$|F| = A \cdot |\sigma'| \cong 1.19 \times 10^5 \text{ N}$$

<参考> 加熱に伴う熱応力の計算



熱応力 $\sigma = \frac{F}{A} = -E \frac{l'-l}{l} = -E \frac{\lambda}{l} = -E\alpha(t'-t)$

E : ヤング率

<問題6>

2. 径 2 cm, 長さ 120 cm のばね鋼に 10 t の引っ張り荷重がかかっている。弾性エネルギーはいくらか。
 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgw/cm}^2$ とする。

(略解)

$$V = (\pi \times 1\text{cm} \times 1\text{cm}) \times 120\text{cm} = 3.768 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$\sigma = \frac{10\text{t}}{\pi \times (1\text{cm})^2} = \frac{10 \times 1000 \text{kgw} \times 9.8 \text{m/s}^2}{\pi \times (0.01\text{m})^2}$$

$$U = Vu = V \frac{\sigma^2}{2E} \cong 89 \text{ N} \cdot \text{m} = 89 \text{ J}$$



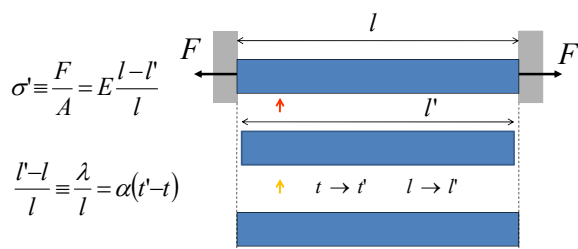
問題1 直径 5 cm の棒を 15000 kgw で縦方向に引っ張ったところ、0.0006 cm 細くなった。ポアソン比はいくらか。ここで、縦弾性係数(ヤング率)を $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgw/cm}^2$ とする。

$$e = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon_1}{\left(\frac{\sigma}{E}\right)} = -\frac{E\varepsilon_1}{\sigma} \quad \because \sigma = E\varepsilon$$

$$= -\frac{E\varepsilon_1}{F/A} = \frac{2.1 \times 10^6 \text{ kgw/cm}^2 \cdot \left(\frac{0.0006}{5}\right)}{15000 \text{ kgw} / (3.14 \times (2.5 \text{ cm})^2)} \cong 0.3297$$

問題2 棒鋼の両端を 40°C で壁に固定してから、温度を 10°C 下げた。棒にはどんな応力がどれほど起きたか。

ここで、縦弾性係数を $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgw/cm}^2$ とし、線膨脹係数を $\alpha = 11.5 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ とする。



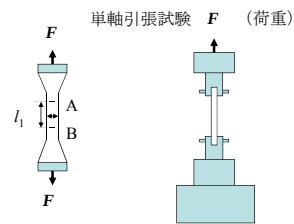
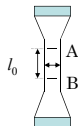
$$\sigma' \equiv \frac{F}{A} = E \frac{l-l'}{l} \quad \frac{l-l'}{l} \equiv \frac{\lambda}{l} = \alpha(t'-t)$$

$$\sigma' = -E \frac{l-l'}{l} = -E \frac{\lambda}{l} = -E\alpha(t'-t) \cong 724.5 \text{ kgw/cm}^2 \quad (\cong 7.1 \times 10^7 \text{ N/m}^2)$$

引っ張りの熱応力が発生

問題4 半径 $r = 1.26 \text{ cm}$ の円柱棒について単軸引張り試験を行う。引張力 $F = 1,000 \text{ N}$ を作用させる前に、棒の上に $l_0 = 30 \text{ cm}$ (標点距離) の距離で離れている A と B の2点に目印をつける。

力をかけたあとで、A と B の距離は $l_1 = 31.5 \text{ cm}$ と測定されている。棒に発生した引張りひずみと平均引張り応力を決めよ。

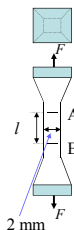


$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{31.5 \text{ cm} - 30.0 \text{ cm}}{30.0 \text{ cm}} = 0.050$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{1000 \text{ N}}{\pi r^2 \text{ cm}^2} = \frac{1000 \text{ N}}{3.14 \times 1.26 \text{ cm} \times 1.26 \text{ cm}} \cong 201 \text{ N/cm}^2 = 2.01 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

問題5 人間の骨皮質組織の弾性係数の決定。
試験片のサイズと形状は右図を参照。
(1) 引っ張り力(応力)とひずみを決定しなさい。
(2) 応力-ひずみ線図を書きなさい。
(3) 骨の弾性係数 E を決めなさい。

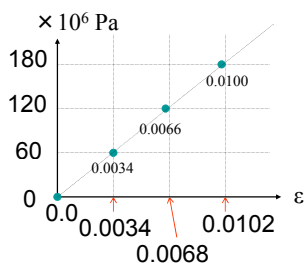
荷重, $F \text{ (N)}$	標点距離, $l \text{ (mm)}$
0	5.000
240	5.017
480	5.033
720	5.050



(1) 引っ張り力(応力)とひずみ

$F \text{ (N)}$	応力 (Pa)	$l \text{ (mm)}$	$\varepsilon \text{ (mm/mm)}$
0	0	5.000	0.0
240	60×10^6	5.017	0.0034
480	120×10^6	5.033	0.0066
720	180×10^6	5.050	0.0100

(2) 応力-ひずみ線図



(3) 弾性係数

$$E \cong \underline{18} \text{ GPa} \quad (1 \text{ GPa} \equiv 1 \times 10^9 \text{ Pa})$$



◎ 材料の変形(3)

1. 材料の機械的性質

材料が外力を受ける場合に
現れる性質を機械的性質という。

(1) 弾性(elasticity: 変形に対する抵抗)

(2) 塑性(plasticity)

(3) 延性(ductility) → 線状に引き延ばすことのできる性質。

(4) 展性(malleability) → 箔への広げ延し

(5) じん性(or 耐性: toughness)
→ 粘り強さ、衝撃に耐える性質。

(6) 脆性(brittleness) → もろい性質。

(7) 硬さ(hardness) → 摩耗に対する抵抗と関係がある

(8) 強さ(strength) → 一般的には引張強さで表される。

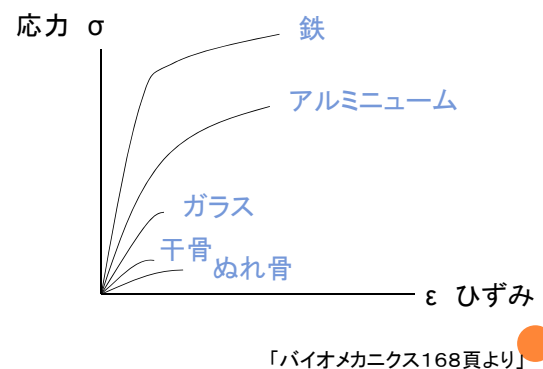
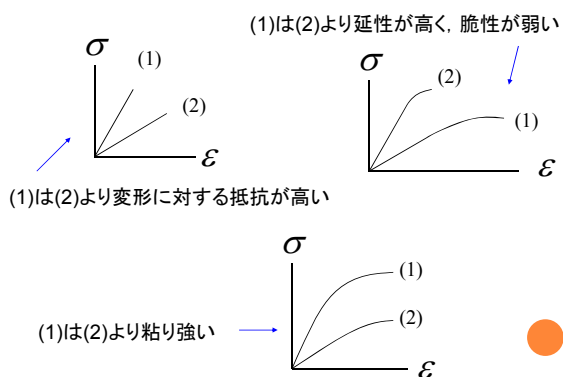
(9) 回復性(resilience)
永久変形が無いとき、材料がエネルギーを蓄える能力を言う。

(10) 均質(homogenous)

(11) 等方性(isotropic)

(12) 非圧縮性(incompressible)

応力-ひずみ線図に基づく物性



<代表的な材料の平均的材料特性>

(「バイオメカニクス」167頁より)

材料	引張降伏強度 (MPa)	引張最大強度 (MPa)	弾性係数 E' (GPa)	剪断係数 G (MPa)	ポアソン比 e
筋肉	-	0.2	-	-	0.49
腱	-	70	0.4	-	0.40
皮膚	-	8	0.5	-	0.49
骨	80	130	17	3.3	0.40
ガラス	35~70	-	70~80	-	-
鑄鉄	40~260	140~380	100~190	42~90	0.29
アルミニウム	60~220	90~390	70	28	0.33
銅	200~700	400~850	200	80	0.30
チタン	400~800	500~900	100	45	0.34

材料の性質(物理的性質)を表す諸量

引っ張り強さ, 弾性限度(比例限度),
 耐力, 縦弾性係数,
 横弾性係数, ポアソン比,
 クリープ限度, 疲れ限度,
 熱膨張係数, 融点,
 比熱, 比重,
 磁性, 導電率,
 耐酸性, 耐アルカリ性,
 耐熱性

2. 材料試験

試験方法の大別

(1) 物理的試験

音響試験, 光学的試験, 熱学的試験,
 X線試験

(2) 機械的試験

静的強度試験, 動的強度試験,
 かたさ試験

(3) 化学的試験

化学成分, 微量分析

材料試験の分類

(1) 破壊試験

化学成分, 静的ならびに動的強度試験, .

(2) 非破壊試験

超音波探傷, X線試験

(3) 部分的破壊試験

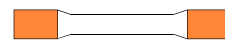
かたさ試験, 火花試験

① 引張試験

万能材料試験機

引張試験と共に圧縮・曲げ試験
 が可能。

<試験片> 1号試験片 ~ 12号試験片



<試験結果>

引張強さ, 降伏点, 伸び,
 絞り(断面積の縮んだ割合)

⑥ 衝撃試験

シャルピー衝撃試験機
(Charpy's impact testing machine)

<http://www.asahiroup.net/hvoz/yun/h-charpy.htm>

アイゾット衝撃試験機
(Izot impact testing machine)

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%A2%E3%82%A4%E3%82%BE%E3%83%83%E3%83%88%E8%A1%9D%E6%92%83%E8%A9%A6%E9%A8%93>

⑦ 硬さ試験

試験法

[1] ひっかき(モースのかたさ)

[2] 押し込み

[3] 反発

[1] ひっかき

モースの硬さ(10段階): 1822年 F. Mohs
1が最も軟らかい, 10が最も硬い。

硬さ1: 滑石 最も柔らかい鉱物で、つるつるした手触り。
硬さ2: 石膏 指の爪で何とか傷をつけることができる。
硬さ3: 方解石 硬貨でするとなんとか傷をつけることができる。
硬さ4: 螢石 ナイフの刃で簡単に傷をつけることができる。
硬さ5: 燧灰石 ナイフでなんとか傷をつけることができる。
硬さ6: 正長石 ナイフで傷をつけることができず、刃が傷む。
硬さ7: 石英 こすりあわせるとガラスや鋼鉄、銅などに傷がつく。
硬さ8: トパーズ(黄玉) こすりあわせると石英に傷をつけることができる。
硬さ9: コランダム(鋼玉) 石英にもトパーズにも傷をつけることができる。
硬さ10: ダイヤモンド(金剛石) 地球上の鉱物の中で最も硬い。

新モースの硬さ(15段階)

修正モース硬度として、15段階に修正されたものが使われる。

1 (1): 滑石
2 (2): 石膏
3 (3): 方解石
4 (4): 螢石
5 (5): 燧灰石
6 (6): 正長石
7 (-): 溶融石英
8 (7): 水晶
9 (8): 黄玉(トパーズ)
10 (-): 拓榴石
11 (-): 溶融ジルコニア
12 (9): 溶融アルミナ[2100]
13 (-): 炭化ケイ素 [2500]
14 (-): 炭化ホウ素 [2750]
15 (10): ダイヤモンド[9000]

() 内が旧モース硬度 [] 内はスウェーデン硬度。

[2] 押し込み

○ ブリネルかたさ(Brinell hardness)
鋼球を押しつける。

<http://www.maekawa-tm.co.jp/product006.html>

○ ロックウェルかたさ(Rockwell hardness)
鋼球 or ダイヤモンド錐を押しつける。

特徴

- (1) 薄い小片の試験片にも適する
(くぼみが小さいため)
- (2) 試験片の表面がそれほど平滑でなくても良い
(最初に基準荷重をかけてから試験荷重をかける方式)

<http://www.pluto.dti.ne.jp/~fujitest/3r-j.htm>

- ビッカースかたさ (Vickers hardness)
圧子はダイヤモンドの四角錐。

特徴

- (1) ブリネルかたさのように荷重の
大小によってかたさ数に変動しない。
- (2) 薄い板材や表面硬化層などのかたさの試験
にも適する。

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%93%E3%83%83%E3%82%AB%E3%83%BC%E3%82%B9%E7%A1%AC%E3%81%95>

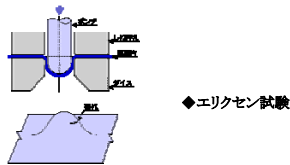
[3] 反発

- ショアかたさ (Shore hardness)

⑬ 塑性加工性試験

エリクセン試験 (薄板のプレス加工に対する適否)

http://www.nc-net.or.jp/kouza/iron/03_3.html



<問題7>

1. 材料の機械的性質を説明してみよう。
また機械的性質として用いられる言葉を
挙げてみよ。

(略解) 材料が外力を受ける場合に現れる性質を
機械的性質という。
機械的性質を表す用語は教科書19頁参照。

<問題7>

- 2 材料を試験する方法を大別してみよ。

(略解) (「材料試験」川田 他著 共立出版 1頁)

<試験方法の大別>

- (1) 物理的試験: 音響試験, 光学的試験, 熱学的試験,
電磁試験, X線試験, 顕微鏡試験, 火花試験, ...
- (2) 機械的試験: 静的強度試験, 動的強度試験,
かたさ試験, 表面あらさ試験, ...
- (3) 化学的試験: 化学成分, 微量分析, ...

<材料試験の分類>

- (1) 破壊試験: 化学成分, 静ならびに動的強度試験, ...
- (2) 非破壊試験: 表面あらさ, 超音波探傷, X線試験, ...
- (3) 部分的破壊試験: かたさ試験, 火花試験, ...

<問題7>

- 3 かたさ試験の種類を挙げてみよ。

(略解)

- (1) ひっかき (モースの硬さ)
- (2) 押し込み
 - * ブリネルかたさ
 - * ロックウェルかたさ
 - * ビッカースかたさ
 (ビッカースかたさの定義は
教科書22頁参照)
- (3) 反発

<問題7>

4 引っ張り試験では何を知ることができるか。

(略解) (「材料試験」川田 他著 共立出版)

引っ張り試験によって測定することが可能な材料の機械的性質には、降伏点(あるいは耐力)、引っ張り強さ、伸び、絞りがある。

更に、比例限度、弾性限度、弾性係数、真破断力、ポアソン比、等。

<問題7>

5 衝撃試験ではどのようなことを知ることができるか。

(略解) (「材料試験」川田 他著 共立出版)

衝撃試験は材料の衝撃力に対する抵抗を判定することが目的であり、じん性、ぜい性を判定する。特に、低温ぜい性、切欠きぜい性、焼もどしぜい性などの性質を調べるのに重要。