

生体力学

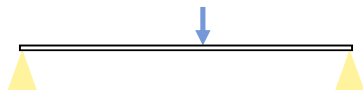
第11回

2010年1月21日(木)



◎ 材料の変形 (6)

1. はりの種類



はり: 水平に支えられて、軸線に垂直方向に力を受け、構造体の一部になっている棒。

支点: はりを支えている点。

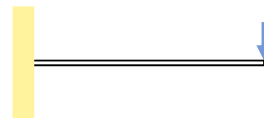
スパン(span): 支点間の距離。

a 片持ばり (cantilever)

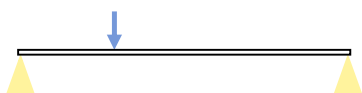
固定端: 固定されているほうの端

自由端: 他方の端

うで(arm): 突き出しているはりの長さ

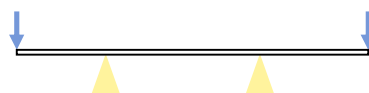


b 両端支持ばり (simple beam) 両端が自由に置かれた状態のはり (単純ばり)

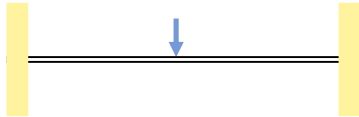


c 張出しばり (overhanging beam)

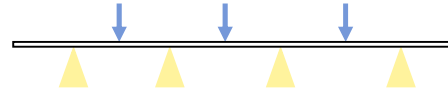
オーバーハングとは、支点から張り出している部分。



d 固定ばり (fixed beam)
両端とも固定されているはり。



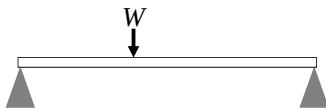
e 連続ばり (continuous beam)
支点が2力以上あるはり。



2. 荷重

はりにかかる荷重の種類

(1) 集中荷重 (concentrated load)



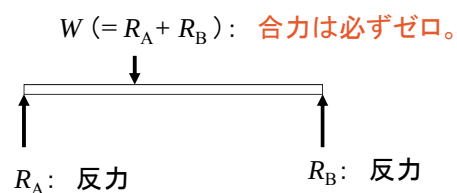
(2) 分布荷重

はりの全長、または一部に分布してかかる荷重。単位長さあたりの荷重が一定の時、**等分布荷重** (uniformly distributed load) という。



3. 反力

はりが支点から受ける力を反力と呼ぶ。



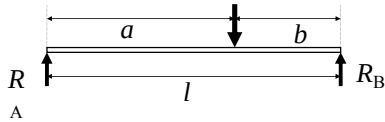
反力の計算には次の2つの条件を使う。

- (1) はりに作用するすべての力の和（合力）はゼロ
- (2) はりにかかる力それぞれのモーメントの代数和は、どの点の回りでもゼロ

注) これらの条件は、せん断力、曲げモーメントの計算でも必要。

1) 合力はゼロ。

$$W = R_A + R_B \rightarrow [W - R_A - R_B = 0]$$

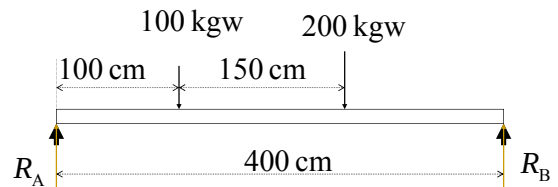


2) はりにかかる力のモーメントの代数和は、どの点の回りでもゼロ。

$$R_A \cdot l - W \cdot b = 0$$

<問題10>

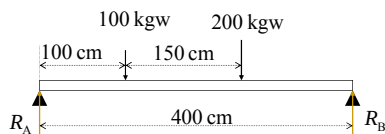
1. 図のようなはりの反力 R_A , R_B を求めよ。



[略解]

(1) はりに作用するすべての力の和(合力)は

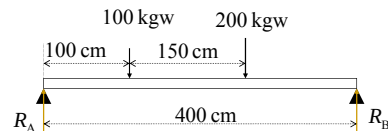
$$\text{ゼロ: } R_A + R_B - 100 \text{ kgw} - 200 \text{ kgw} = 0$$



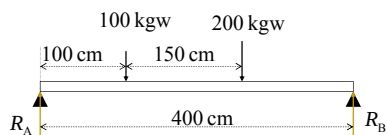
[略解]

(2) はりにかかる力それぞれのモーメントの代数和は、どの点の回りでもゼロ:

$$100 \text{ cm} \times 100 \text{ kgw} + 250 \text{ cm} \times 200 \text{ kgw} - 400 \text{ cm} \times R_B = 0$$



[略解]



$$R_A + R_B - 100 \text{ kgw} - 200 \text{ kgw} = 0$$

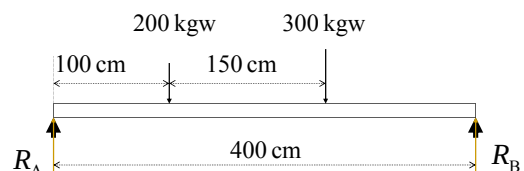
$$100 \text{ cm} \times 100 \text{ kgw} + 250 \text{ cm} \times 200 \text{ kgw} - 400 \text{ cm} \times R_B = 0$$

従って、これら二つの式から、

$$R_A = 150 \text{ kgw} \quad R_B = 150 \text{ kgw} \text{ と求まる。}$$

小テスト10

問題1

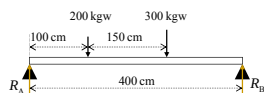


問題1. 図のようなはりの反力 R_A と R_B を求めよ。
 (1) はりに作用するすべての力の和(合力)

はゼロ: $R_A + R_B - 200\text{kgw} - 300\text{kgw} = 0$

(2) はりにかかる力それぞれのモーメントの
 代数和は、どの点の回りでもゼロ:

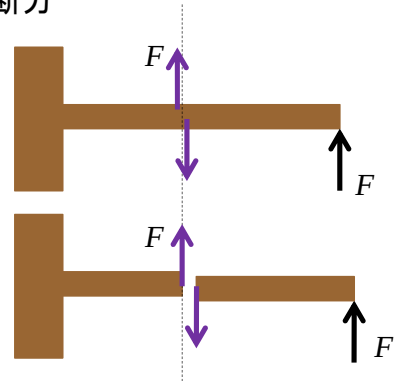
$$100\text{cm} \times 200\text{kgw} + 250\text{cm} \times 300\text{kgw} - 400\text{cm} \times R_B = 0$$



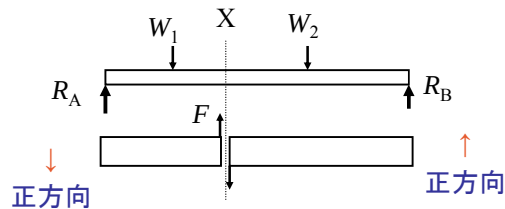
$$R_A = 262.5 \text{ kgw}$$

$$R_B = 237.5 \text{ kgw}$$

4. セン断力



断面 X のせん断力 (F)



$$F = R_B - W_2 \text{ (右側の力の和)}$$

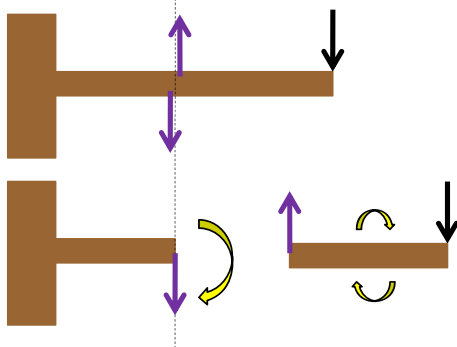
$$\text{あるいは } F = -R_A + W_1 \text{ (左側の力の和)}$$

$$\text{参考 } R_B + R_A - W_1 - W_2 = 0$$

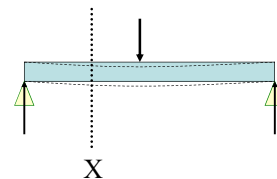
せん断力の計算の手順

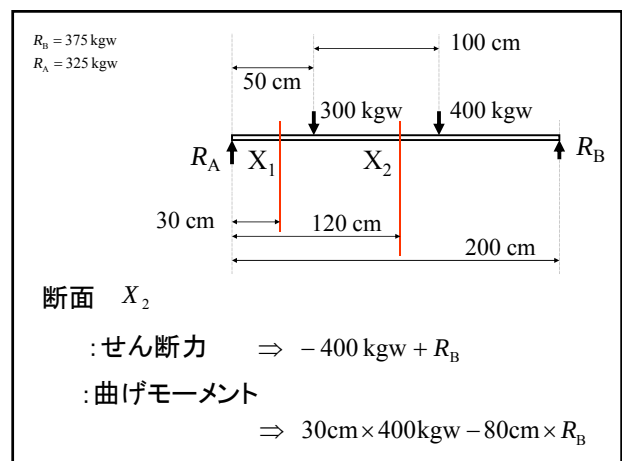
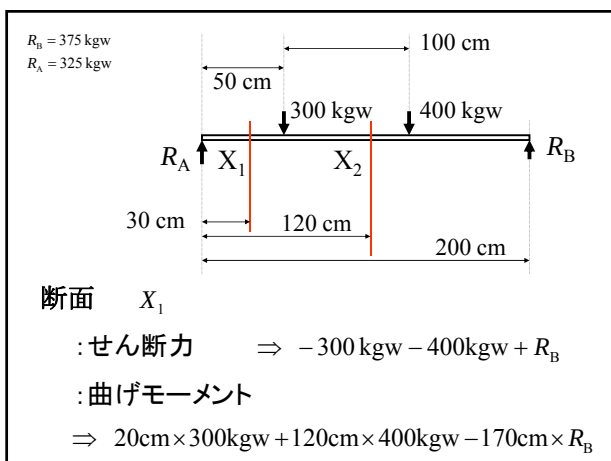
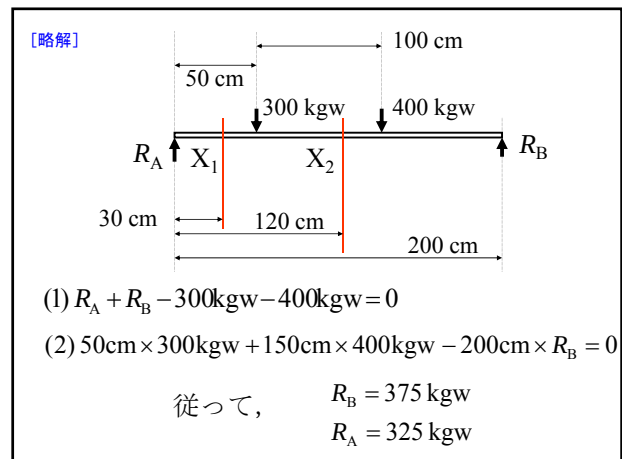
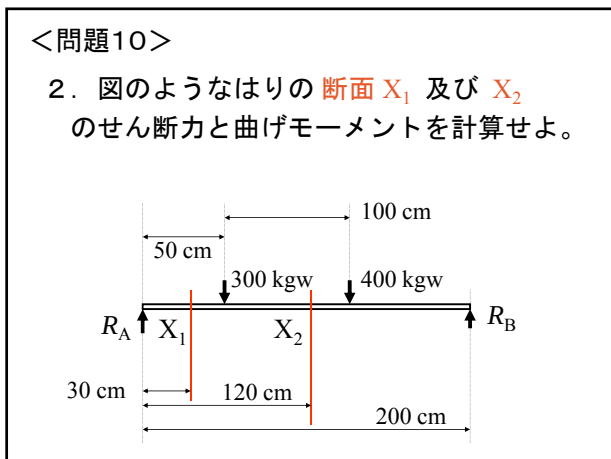
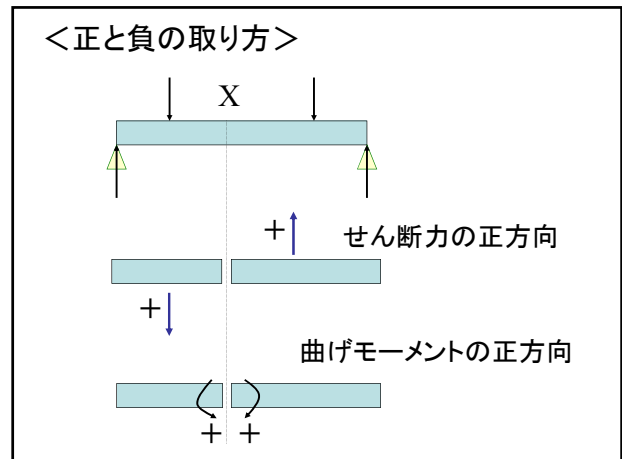
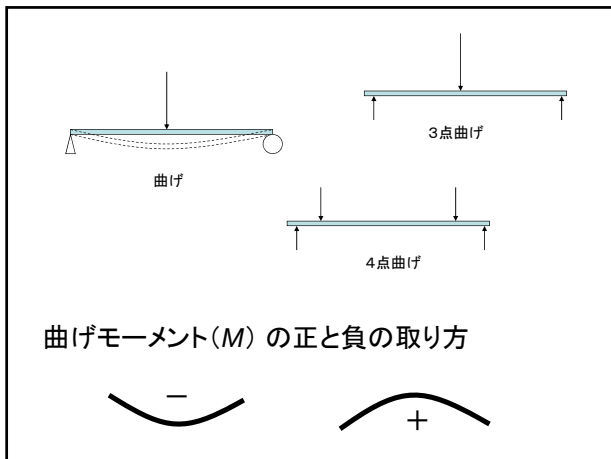
- (1) 考えている断面のせん断力 F の大きさは、断面の片側に働く力の代数和。
 上向きの力を正とするときは、
 下向きの力を負として加え合わせる。
- (2) 断面の左側の力は、下向きを正とする。
- (3) 断面の右側の力は、上向きを正とする。

5. 曲げモーメント



断面 X の曲げモーメントは、その断面の片側の力だけによるモーメントの和で表す。





小テスト10

問題2. 図のようなはりの断面 X_1 及び X_2 のせん断力と曲げモーメントを計算せよ。

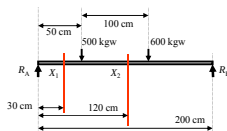
○ R_A と R_B の計算。

$$(1) R_A + R_B - 500\text{kgw} - 600\text{kgw} = 0$$

$$(2) 50\text{cm} \times 500\text{kgw} + 150\text{cm} \times 600\text{kgw} - 200\text{cm} \times R_B = 0$$

$$R_A = 525\text{kgw}$$

$$R_B = 575\text{kgw}$$



○せん断力と曲げモーメントの計算

$$R_A = 525\text{kgw}$$

$$R_B = 575\text{kgw}$$

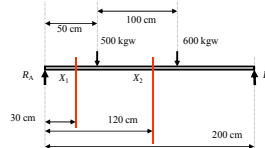
断面 X_1

$$\text{せん断力} \Rightarrow -500\text{kgw} - 600\text{kgw} + R_B = -525\text{kgw}$$

曲げモーメント

$$\Rightarrow 20\text{cm} \times 500\text{kgw} + 120\text{cm} \times 600\text{kgw} - 170\text{cm} \times R_B = -15,750\text{kgw} \cdot \text{cm}$$

$$= -157.5\text{kgw} \cdot \text{m}$$



断面 X_2

$$R_A = 525\text{kgw}$$

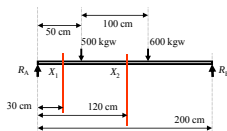
$$R_B = 575\text{kgw}$$

$$\text{せん断力} \Rightarrow -600\text{kgw} + R_B = -25\text{kgw}$$

曲げモーメント

$$\Rightarrow 30\text{cm} \times 600\text{kgw} - 80\text{cm} \times R_B = -28,000\text{kgw} \cdot \text{cm}$$

$$= -280\text{kgw} \cdot \text{m}$$



◎ 材料の変形 (7)

1. せん断力図：集中荷重，分布荷重

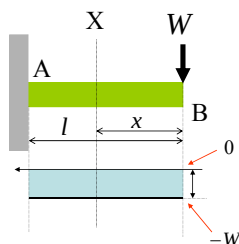
A 集中荷重を受ける片持ばり

せん断力(F)

AB 間のどの場所でもせん断力は一定

$$F(x) = -W$$

例 $l = 200\text{cm}$, $W = 200\text{kgw}$



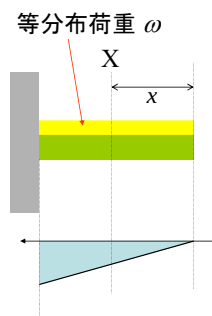
B 等分布荷重を受ける片持ばり

せん断力(F)

単位長さ当たりの荷重を ω で表す。

$$F(x) = -\omega \cdot x$$

例 $l = 200\text{cm}$, $\omega = 10\text{kgw/cm}$



C 集中荷重を受ける両端支持ばり

反力: R_A, R_B

$$W - R_A - R_B = 0$$

$$W \cdot a - R_B \cdot l = 0$$

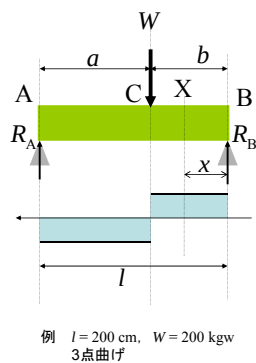
せん断力(F)

$$b > x \geq 0$$

$$F(x) = R_B$$

$$l \geq x > b$$

$$F(x) = R_B - W$$



D 等分布荷重を受ける両端支持ばり

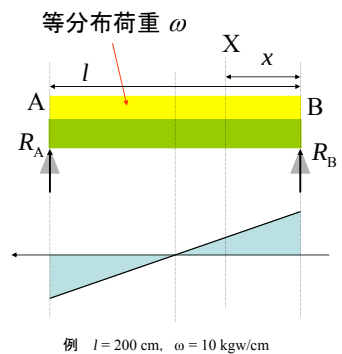
反力: R_A, R_B

$$\omega \cdot l - R_A - R_B = 0$$

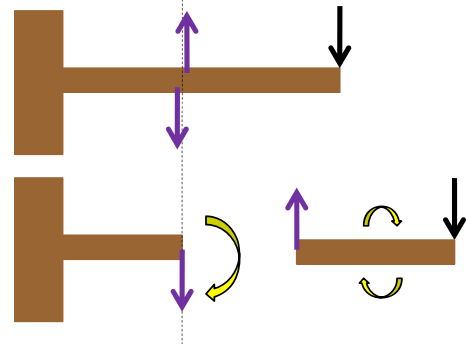
$$\frac{\omega \cdot l^2}{2} - R_B \cdot l = 0$$

せん断力(F)

$$F(x) = R_B - \omega \cdot x$$



曲げモーメント

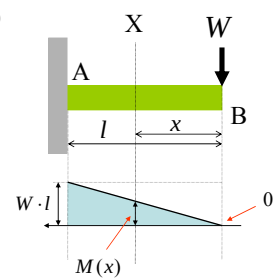


2. 曲げモーメント図: 集中荷重, 分布荷重

A 集中荷重を受ける片持ばり

曲げモーメント (M)

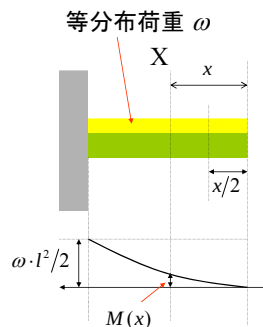
$$M(x) = Wx$$



B 等分布荷重を受ける片持ばり

曲げモーメント (M)

$$M(x) = \frac{\omega \cdot x^2}{2}$$



C 集中荷重を受ける両端支持ばり

反力: R_A, R_B

$$W - R_A - R_B = 0$$

$$W \cdot a - R_B \cdot l = 0$$

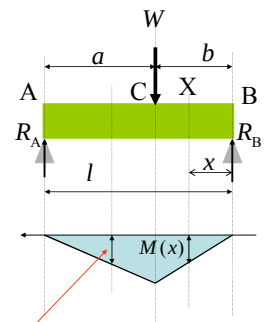
曲げモーメント (M)

$$b > x \geq 0$$

$$M(x) = -R_B \cdot x$$

$$l \geq x > b$$

$$M(x) = -R_B \cdot x + W(x - b) \\ = (W - R_B)x - Wb$$



D 等分布荷重を受ける両端支持ばり

反力: R_A, R_B

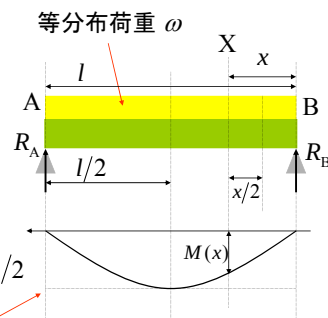
$$\omega \cdot l - R_A - R_B = 0$$

$$\frac{\omega \cdot l^2}{2} - R_B \cdot l = 0$$

曲げモーメント (M)

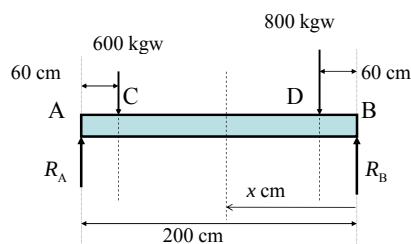
$$M(x) = -R_B \cdot x + \omega \cdot x^2 / 2$$

$$M_{\max} = \omega \cdot l^2 / 8$$



プリント: 第11回

2. 次の図では、はりに集中荷重 (600kgw, 800kgw) がかかっている。せん断力図と曲げモーメント図を描け。また、最大曲げモーメントの大きさと位置を求めよ。

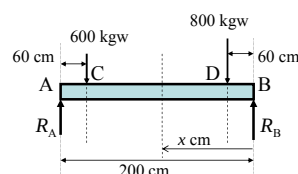


<略解> (式中の単位記載を省略)

(1) 反力の計算: R_A [kgw], R_B [kgw]

$$R_A + R_B - 600 - 800 = 0$$

$$-200 \times R_B + 140 \times 800 + 60 \times 600 = 0$$



$$R_A = 660 \text{ kgw}$$

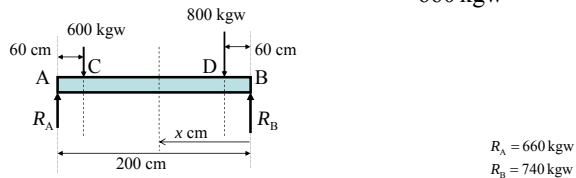
$$R_B = 740 \text{ kgw}$$

(2) せん断力図: F kgw

D-B間 $(60 > x > 0)$ $F(x) = R_B = 740 \text{ kgw}$

C-D間 $(140 > x > 60)$ $F(x) = R_B - 800 = -60 \text{ kgw}$

A-C間 $(200 > x > 140)$ $F(x) = R_B - 800 - 600$
 $= -660 \text{ kgw}$

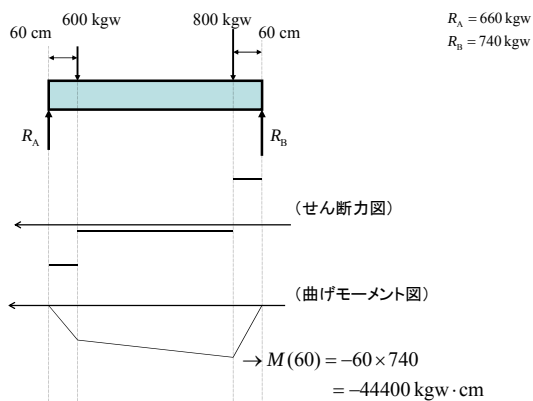


(3) 曲げモーメント図:

D-B間 $(60 > x > 0)$ $M(x) = -x \times R_B = -740x$

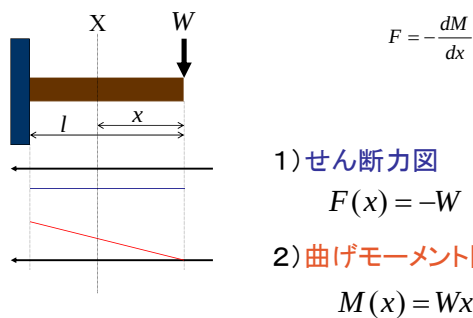
C-D間 $(140 > x > 60)$ $M(x) = -x \times R_B + (x - 60) \times 800$
 $= 60x - 48000$

A-C間 $(200 > x > 140)$
 $M(x) = -x \times R_B + (x - 60) \times 800 + (x - 140) \times 600$
 $= 660x - 132000$

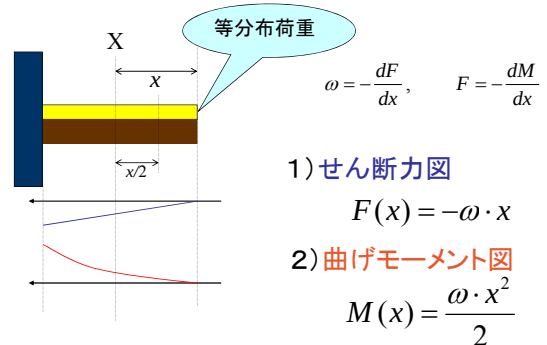


まとめ+補足

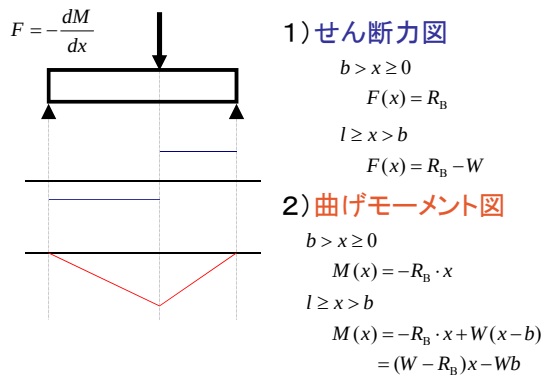
A 集中荷重を受ける片持ばり



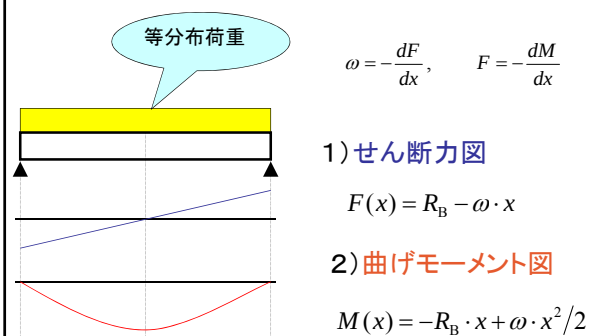
B 等分布荷重を受ける片持ばり



C 集中荷重を受ける両端支持ばり



D 等分布荷重を受ける両端支持ばり

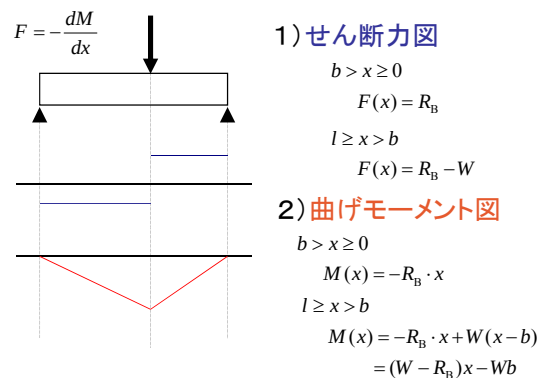


3. せん断力図と曲げモーメント図の関係

(1) 集中荷重を受ける両端支持ばり

最大曲げモーメントの起きている断面で、せん断力は負から正に変わる。

集中荷重を受ける両端支持ばり

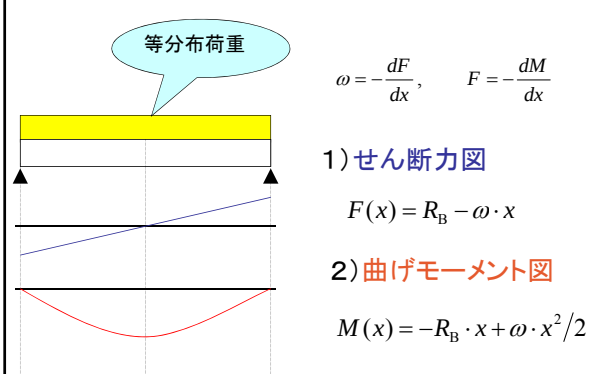


(2) 等分布荷重を受けているはり

最大曲げモーメントの起きている断面で、せん断応力はゼロである。

せん断力が負から正、あるいはゼロになる断面で曲げモーメントが最大になる。

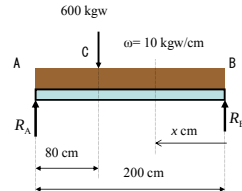
等分布荷重を受ける両端支持ばり



プリント： 第11回

1. 次の図では、はりに集中荷重(600kgw)と等分布荷重(10kgw/cm)がかかっている。

せん断力図と曲げモーメント図を描け。また、最大曲げモーメントの大きさと位置を求めよ。はりの断面の位置ははりの右端(Bの位置)からの距離を x [cm] とせよ。



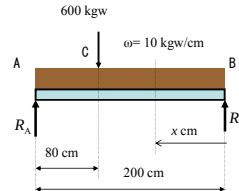
<略解> (式中の単位記載を省略)

$$\omega = 10 \text{ kgw/cm}$$

(1) 反力の計算: R_A [kgw], R_B [kgw]

$$R_A + R_B - 600 - 200 \cdot \omega = 0$$

$$-200 \times R_B + 80 \times 600 + \frac{200}{2} \times (200 \cdot \omega) = 0$$



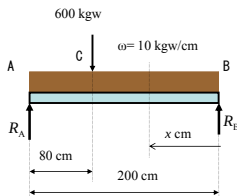
$$R_A = 1360 \text{ kgw}$$

$$R_B = 1240 \text{ kgw}$$

(2) せん断力図: F kgw

$$\text{C-B間} \quad (120 > x > 0) \quad F(x) = R_B - \omega \cdot x = 1240 - 10x$$

$$\text{A-C間} \quad (200 > x > 120) \quad F(x) = R_B - \omega \cdot x - 600 = 640 - 10x$$



$$R_A = 1360 \text{ kgw}$$

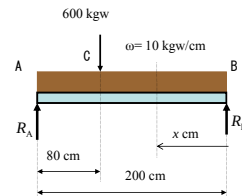
$$R_B = 1240 \text{ kgw}$$

(3) 曲げモーメント図:

$$\text{C-B間} \quad (120 > x > 0) \quad M(x) = -x \times R_B + \frac{x}{2} \cdot (\omega \cdot x) = -1240x + 5x^2$$

A-C間 $(200 > x > 120)$

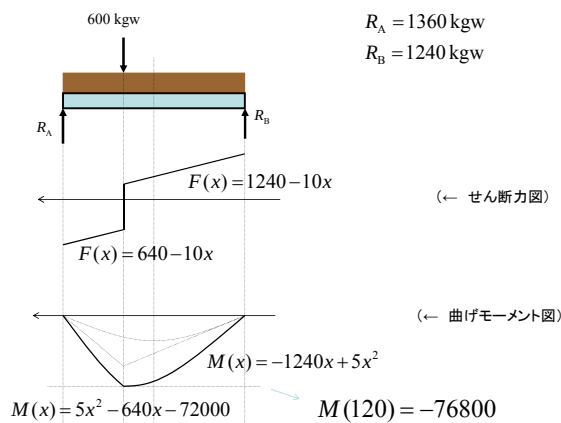
$$M(x) = -x \times R_B + \frac{x}{2} \cdot (\omega \cdot x) + (x - 120) \times 600 = 5x^2 - 640x - 72000$$



$$R_A = 1360 \text{ kgw}$$

$$R_B = 1240 \text{ kgw}$$

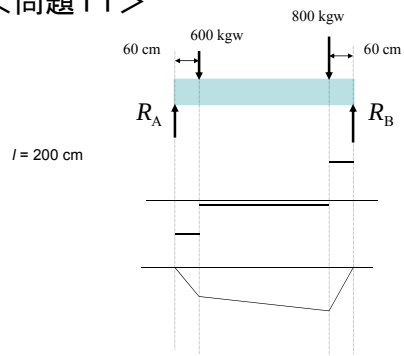
(注意) 曲げモーメントの単位は $\text{kgw} \cdot \text{cm}$



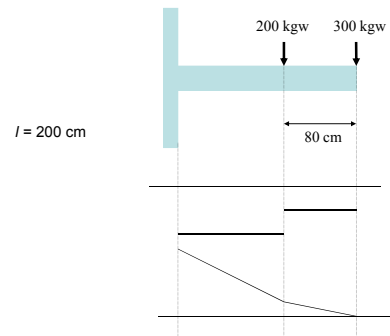
<問題11>

1. 次の各図に示すようなはりのせん断力図と曲げモーメント図の概略を描き、最大曲げモーメントの位置を推定しなさい。

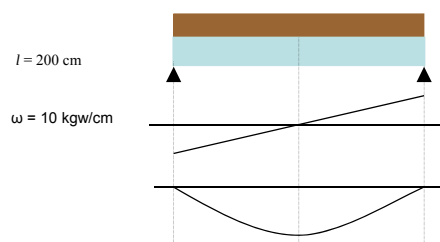
<問題11>



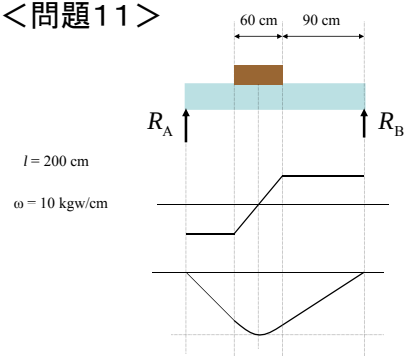
<問題11>



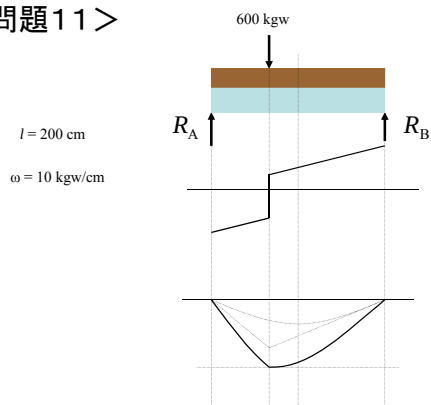
<問題11>



<問題11>



<問題11>



<問題11>

